

# INTRODUCCIÓN A LA SUPERSIMETRÍA

JOSÉ A. VALLEJO

RESUMEN. Estas notas pretenden ser una introducción elemental al tema de la supersimetría adecuada a la formación de matemáticos, partiendo de los conceptos básicos de la Mecánica Cuántica. El objetivo fundamental es obtener una realización de la superálgebra de Heisenberg como una subálgebra del álgebra graduada de endomorfismos de un cierto superespacio vectorial (un ejemplo del teorema de Ado en superálgebras de Lie), utilizando para ello el modelo de Witten de la Mecánica Cuántica supersimétrica.

Las notas tienen su origen en un seminario para estudiantes del posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí impartido por el autor.

## ÍNDICE

1. Introducción	2
2. El experimento de Stern-Gerlach y el espín	3
3. Espacio de estados y observables	5
4. Descripción de partículas con espín 1/2	7
5. Las ecuaciones de Schrödinger y Dirac-Heisenberg	11
6. El teorema de conexión espín-estadística	13
7. Principio de exclusión y números de ocupación	15
8. Ejemplo: un bosón y un fermión en una caja	17
9. El álgebra de los operadores de creación y aniquilación	19
10. Superálgebras de Lie, teorías gauge y supervariedades	21
11. Ejemplo: La superálgebra de Lie $End(\mathbb{C}^2)$	24
12. Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY QM)	28
13. Realización explícita de la superálgebra de Heisenberg	32
14. Aplicaciones de la supersimetría	35
Apéndice A. Las relaciones de incertidumbre	39
Apéndice B. El corchete de Poisson y el conmutador cuántico	41
Referencias	42

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 81Q60,17B70,17B81,16W50.

*Key words and phrases.* Superálgebra de Heisenberg, superespacios vectoriales, Mecánica Cuántica supersimétrica.

Parcialmente financiado por: Proyecto SEP-CONACyT Ciencia Básica (J2) 2007-1 código 78791 (México) y Proyecto MTM2005-04947 Ministerio de Educación y Ciencia (España). Este trabajo se encuentra en su versión final y no será sometido a otra publicación.

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos, el tema de la supersimetría (en general, de todas las teorías “súper” ) ha pasado por todos los estados de reconocimiento posibles: desde las primeras expectativas, quizás un tanto optimistas, a un parcial abandono o a una inesperada resurrección. El hecho es que se han mantenido a flote por dos razones fundamentales: una, la más mencionada, es la belleza y consistencia del formalismo matemático que se emplea en su descripción, pero la otra, mucho más importante, es su aplicación a la explicación de fenómenos que quedan fuera del alcance de las teorías clásicas. No se debe olvidar que ésta fue la motivación original para su introducción, las teorías de supersimetría tienen una vocación eminentemente práctica.

Sin embargo, bien es cierto que es difícil apreciar estas posibles aplicaciones cuando se estudia alguno de los textos clásicos sobre el tema (ver [Kos 77], [GSW 87], [Wes-Bag 92]), y mucho menos aún es fácil darse cuenta de lo natural que resulta el punto de vista supersimétrico. Habitualmente, o bien se comienza discutiendo las propiedades de las posibles extensiones del grupo de Poincaré para contemplar las simetrías internas, o bien se estudian las colisiones entre partículas a altas energías para ilustrar la necesidad de una unificación de las interacciones en ese régimen. Pero las raíces de la teoría son mucho más simples, y se remontan a los intentos de F. Berezin de dar un tratamiento unificado para los bosones y fermiones en el contexto de la Mecánica Cuántica (véase [Ber 66] y aplicaciones dentro de la mecánica clásica en [Cas 76]).

Precisamente, estas notas tienen como objetivo el presentar a un público matemático las ideas más básicas de la supersimetría en un contexto elemental, accesible con sólo la base de unas nociones elementales de Álgebra y Análisis Funcional. No es imprescindible tener conocimientos previos de Física Cuántica (basta un curso de Física Básica), los conceptos necesarios para la comprensión de la terminología habitual (bosones, fermiones, etc...) se irán introduciendo a medida que se necesiten. De este modo, el autor espera que las notas sean útiles a los matemáticos que estén interesados en el tema y que se aproximen a él por primera vez.

Con el fin de mantener un nivel asequible, sólo discutiremos la Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY QM), un estudio de las teorías de campo requiere de un formalismo matemático más avanzado y un tratamiento mucho más extenso.

Comenzaremos con un breve repaso de cómo se introdujo, históricamente, el espín. Un lector que no esté interesado en los aspectos físicos del problema, puede omitir su lectura sin problema; conceptos como el de operador de espín serán introducidos más adelante dentro de un contexto puramente matemático. La primera parte de las notas (secciones 1 a 9) contienen una descripción del formalismo básico de la Mecánica Cuántica expresado de una manera más formal que la acostumbrada en los libros de texto de Física, con el fin de que un matemático sin formación previa en Física pueda comprender el lenguaje de la segunda parte (el resto de secciones), donde se presenta la construcción de una realización de la superálgebra de Heisenberg como una subálgebra de los endomorfismos graduados de un cierto superespacio vectorial, dando así un ejemplo de la validez del Teorema de Ado en la categoría de superálgebras de Lie. La sección 11 es en realidad una excusa para presentar los rudimentos de la teoría del álgebra lineal en superespacios vectoriales. Un lector con conocimientos previos del formalismo estándar de la Mecánica Cuántica puede pasar directamente a la sección 11. La sección 10 tiene un carácter más

especializado que el resto, su intención es la de presentar la idea de supersimetría en un contexto mucho más amplio que el de la Mecánica Cuántica (el de las teorías gauge) y su lectura puede omitirse sin problemas en caso de que se desconozcan los conceptos que en ella aparecen.

La última sección tiene por objeto mostrar como esta construcción no es un mero ejercicio matemático, sino que tiene profundas consecuencias en Física (que van mucho más allá de las limitadas aplicaciones que veremos).

Con el fin de que estas notas también puedan resultar de utilidad a aquellos físicos interesados en conocer la base formal de los trabajos sobre SUSY QM, se ha evitado la presentación habitual en Matemáticas (definiciones, lemas, teoremas, etc.) que tiende a ahuyentar a este tipo de lector. El autor espera que esta decisión no implique que quien se ahuyente sea el lector de inclinaciones matemáticas.

**Agradecimientos.** Durante la elaboración de estas notas, he tenido el beneficio de numerosas discusiones con Juan Monterde, Gil Salgado, Adolfo Sánchez Valenzuela y Jesús Urías. A todos ellos quisiera darles las gracias por sus acertados comentarios, sugerencias y útiles críticas. De manera muy especial quisiera agradecerle al árbitro anónimo sus valiosos comentarios acerca de la bibliografía, gracias a los cuales el lector puede disponer de una acertada selección de trabajos para profundizar en su conocimiento de la SUSY QM y otros temas relacionados.

Por supuesto, cualquier incorrección, omisión o malinterpretación en el texto, es responsabilidad exclusiva del autor.

## 2. EL EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH Y EL ESPÍN

En el año 1922 eran frecuentes en Física los experimentos de interacción entre partículas cargadas y campos magnéticos; por ejemplo, para una partícula cargada que pasa entre dos imanes con polaridades opuestas, dispuestos verticalmente, la teoría electromagnética clásica, basada en el hecho de que la partícula no es puntual sino que se describe por una cierta distribución de carga, predice lo siguiente:

1. Si la partícula no gira sobre si misma, no hay desviación vertical.
2. Si la partícula tiene un movimiento dextrógiro, se desvía hacia arriba.
3. Si la partícula tiene un movimiento levógiro, se desvía hacia abajo.

La magnitud de la desviación depende de la distribución de carga de la partícula y de la velocidad angular de giro. Veámoslo con más detalle: la teoría clásica supone que cada partícula tiene un momento magnético permanente  $\boldsymbol{\mu}$ , dado por  $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}$  donde  $\mathbf{S}$  es el momento angular intrínseco debido al giro de la partícula <sup>1</sup>. A  $\gamma$  se le denomina coeficiente giromagnético o factor de Landé. Cuando la partícula se coloca en el seno de un campo magnético externo  $\mathbf{B}$  el trabajo total que se efectúa es

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B},$$

el momento de torsión viene dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B},$$

y la fuerza sobre la partícula resulta ser

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}). \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Denotaremos los vectores tridimensionales en negrita.

En los experimentos (véase más abajo) se suele disponer un campo inhomogéneo  $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ , en la región por la que va a pasar el haz de partículas, se ajustan los parámetros del campo de manera que se tenga  $B_z \gg B_x$  y así  $\mathbf{B} \simeq B_z \hat{\mathbf{z}}$ . En estas condiciones, de la igualdad  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{S}}{dt}$  resulta

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{dt} &= \gamma S_y B_z \\ \frac{dS_y}{dt} &= -\gamma S_x B_z \\ \frac{dS_z}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Es decir, si escribimos  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\parallel} + \mathbf{S}_{\perp}$ , donde  $\mathbf{S}_{\parallel}$  es la componente de  $\mathbf{S}$  paralela al eje  $\hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{S}_{\perp}$  su componente perpendicular, tenemos que la primera es constante, mientras que la segunda gira alrededor del eje  $\hat{\mathbf{z}}$  con una velocidad angular  $\omega = \gamma B_z$ .

Por otra parte, la componente de la fuerza que actúa sobre las partículas del haz en la dirección del eje  $\hat{\mathbf{z}}$  es

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\mu_z B_z + \mu_x B_x) \simeq \frac{\partial}{\partial z} (\mu_z B_z) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

por lo que se ve claramente que  $F_z$  produce una desviación de las partículas en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$  proporcional a la proyección  $\mu_z$ . Conociendo  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  y esta desviación, es posible conocer  $\mu_z$  y, obviamente, no hay motivo alguno para no esperar medir todos los valores posibles de esta componente, que irán desde  $-|\mu|$  a  $|\mu|$ .

Estas predicciones estaban siendo verificadas por O. Stern y W. Gerlach utilizando un haz de átomos de plata, cuando se encontraron con la sorpresa de que el comportamiento observado no era el esperado (ver [Ger-Ste 24]): se observaba una desviación, pero no hacia arriba o hacia abajo, sino hacia arriba y abajo a la vez (la Figura 1 da una representación esquemática del experimento).

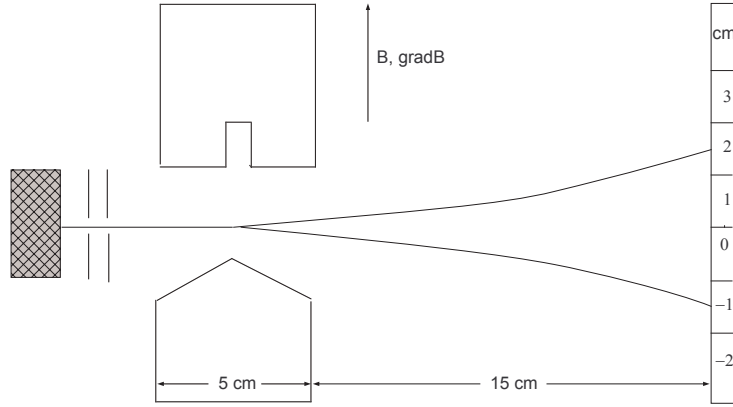


FIGURA 1. Experimento de Stern-Gerlach.

La magnitud de la desviación era la misma en ambos rayos y esto era totalmente incompatible con el modelo clásico. En 1925 S. Goudsmith y G. Uhlenbeck (ver [Gou-Uhl 25]) propusieron una solución al enigma planteado por este experimento

mediante la introducción de un nuevo “número cuántico”<sup>2</sup>, el *espín*, capaz de interactuar con un campo magnético. De hecho, formalmente las propiedades del espín son las mismas que las de un momento angular ordinario, por lo que a veces se le denomina “momento angular interno” (sin embargo, debe resaltarse el hecho de que el espín no está asociado a ningún movimiento espacial, ni de la partícula ni de su distribución de carga asociada, es una magnitud “intrínseca” a cada partícula, de ahí el calificativo de momento “interno” ). Al igual que al momento angular orbital asociado al movimiento de rotación del electrón alrededor del núcleo se le asocia un momento magnético, al nuevo momento angular de espín se le asocia un momento magnético  $\mathbf{m}$ , con las mismas propiedades que  $\boldsymbol{\mu}$ , en particular, su forma de acoplarse a un campo magnético.

El caso es que experimentalmente se determina que el espín del electrón vale  $1/2$ , y el operador (observable) correspondiente proyectado sobre un eje espacial, digamos el del campo magnético entre los imanes  $\mathbf{B}$ , admite sólo dos valores propios:  $1/2$  y  $-1/2$  (véase la sección 4). Esto, junto con el hecho de que el momento angular neto de los átomos de plata se debe únicamente al momento de espín del electrón exterior de su capa de valencia, explica por qué se observan dos rayos desviados en sentidos opuestos<sup>3</sup>.

### 3. ESPACIO DE ESTADOS Y OBSERVABLES

La descripción cuántica habitual del estado de un sistema físico se lleva a cabo a través de su función de onda asociada, un elemento  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  del espacio de las funciones con valores complejos y de cuadrado integrable (en sentido Lebesgue) de  $\mathbb{R}^3$ . Este espacio resulta ser de Hilbert, y su producto escalar está dado por

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^* \varphi, \quad (2)$$

donde  $\psi^*$  denota la conjugada compleja de  $\psi$ .

Realmente, como estamos interesados en estudiar evoluciones temporales, los objetos básicos son curvas  $f : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  tales que  $f(t) = \psi_t(\mathbf{x})$ , y es común escribir simplemente  $\psi_t(\mathbf{x}) \equiv \psi(t, \mathbf{x})$  diciendo que “la función de onda depende del tiempo”.

Una observación: no hay que confundir  $\psi_t(\mathbf{x}) \equiv \psi(t, \mathbf{x})$  con una trayectoria de la partícula. La interpretación estándar de  $\psi_t(\mathbf{x})$  sólo afirma que en cada instante  $t$  hay una cierta probabilidad de hallar la partícula en un entorno de  $\mathbf{x}$ , no que en su movimiento la partícula describa una trayectoria definida (tal concepto está fuera de la Mecánica Cuántica debido a las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, véase el Apéndice A).

De acuerdo con la interpretación probabilista de Max Born, el significado físico de la función de onda es que la probabilidad de encontrar el sistema en una posición

---

<sup>2</sup>Históricamente, Goudsmith y Uhlenbeck no introdujeron la hipótesis del espín para explicar los resultados de Stern-Gerlach, sino para corregir unas irregularidades observadas en el estudio de ciertas series espectroscópicas, pero pronto se pudo ver, a la luz de la nueva propuesta, que la explicación que hasta el momento se daba del experimento de Stern-Gerlach (basadas en la llamada “cuantización espacial”) era errónea, y que el espín servía también para dar una nueva teoría más acertada.

<sup>3</sup>Un átomo de plata tiene 47 electrones, de los cuales 46 se encuentran en un estado que tiene momento angular orbital y de espín nulos, mientras que el electrón restante se encuentra en un estado  $s^1$ , que también tiene momento angular orbital nulo; por tanto, el espín total del átomo es el momento de espín de este electrón

e instante determinados viene descrita por la *función de densidad*

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \psi^*(t, \mathbf{x}) \cdot \psi(t, \mathbf{x}), \quad (3)$$

supuesta la normalización

$$\|\psi_t(\mathbf{x})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_t^* \psi_t = 1. \quad (4)$$

La interpretación de Copenhague de la Mecánica Cuántica, basada en este postulado de Born, afirma además que el producto (2) proporciona la *amplitud de probabilidad de transición* desde un estado del sistema descrito por  $\varphi$  a otro descrito por  $\psi$ .

En la notación de Dirac, un elemento de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  tal como  $\varphi$  (ó  $\varphi(t, \mathbf{x})$  si trabajamos con curvas) se escribe  $|\varphi\rangle$  (ó  $|\varphi(t, \mathbf{x})\rangle$ ) y se denomina “ket”. De acuerdo con el Teorema de Representación de Riesz, si  $\psi$  es otro elemento de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  o un conjunto de ellos dados por una curva  $\psi(t, \mathbf{x})$ , a cada uno le corresponde un elemento del dual topológico  $(L^2(\mathbb{R}^3))'$ , es decir, un funcional continuo que actúa mediante el producto escalar y que se representa por  $\langle\psi(t, \mathbf{x})|$ , el llamado “bra”: para cada  $t \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle\psi(t, \mathbf{x})| & : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{C} \\ |\varphi(t, \mathbf{x})\rangle & \mapsto \langle\psi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x})\rangle. \end{aligned}$$

Así, para pasar de un estado  $|\varphi(t, \mathbf{x})\rangle$  a otro  $|\psi(t, \mathbf{x})\rangle$  no hay más que formar el “bracket” de ambos.

Resulta evidente que la función de densidad (3), que codifica la información básica acerca de la partícula, no se ve alterada si en lugar de  $\psi(t, \mathbf{x})$  tomamos su modificación por un factor de fase global, esto es, una función de onda de la forma  $e^{i\alpha}\psi(t, \mathbf{x})$ , donde  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Y, de hecho, ya hemos utilizado esta característica al imponer la normalización (4); en este sentido, a veces se dice que los estados de un sistema físico están descritos por rayos en el espacio  $L^2(\mathbb{R}^3)$ : se toma como espacio de trabajo el cociente  $L^2(\mathbb{R}^3)/\mathcal{R}$ , donde la relación de equivalencia es:  $\psi\mathcal{R}\varphi$  si y sólo si existe un  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $\psi = e^{i\alpha}\varphi$  (es decir, se trabaja con el espacio proyectivizado  $P(L^2(\mathbb{R}^3))$ ). Entonces, el normalizar la función de onda equivale a trabajar con el representante de la clase con norma unitaria.

Sobre estos estados  $|\psi(t, \mathbf{x})\rangle$  actúan los *observables*: llamamos observable a un operador  $A \in \text{End}_{\mathbb{C}} L^2(\mathbb{R}^3)$  tal que es autoadjunto respecto del producto escalar en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Es sabido que, en tal caso,  $A$  tiene todos sus valores propios reales y esos valores propios (según postula la Mecánica Cuántica) son los posibles valores de las mediciones de (la magnitud física que representa)  $A$  sobre el sistema.

La forma habitual de construir estos observables cuánticos procede por analogía con sus contrapartidas clásicas. Sin embargo, no existe un método general para realizar este proceso, conocido como *cuantización*, por lo que definirlos correctamente es casi un arte. De hecho, hay propiedades observables cuánticas que no tienen un análogo clásico directo (como es el caso del espín en el experimento de Stern-Gerlach) y, en definitiva, el problema de la cuantización es fundamental y sigue abierto.

En cualquier caso, lo que nos interesa resaltar ahora es que si sólo consideramos operadores actuando sobre funciones (o curvas) en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , nos estamos restringiendo a propiedades del sistema que dependen de su extensión espacio-temporal, pero no es posible describir entonces propiedades “intrínsecas” como el espín de Goudsmit y Uhlenbeck. Es preciso ampliar el espacio de estados de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  a otro espacio

de Hilbert en el que tengan cabida los objetos necesarios para describir propiedades como el espín, que no dependen del movimiento del sistema en el espacio físico tridimensional<sup>4</sup>.

En los siguientes párrafos veremos cómo la descripción del espín 1/2 (es decir, una magnitud física representada por un operador autoadjunto que sólo admite dos valores propios, uno positivo y otro negativo) puede hacerse muy fácilmente en un espacio bien sencillo:  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Si a este espacio lo llamamos “espacio de espín”, por contraposición al “espacio de grados de libertad espacio-temporales  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ”, vemos que el espacio total de estados para una partícula de espín 1/2 es

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2,$$

y los observables físicos serán los endomorfismos autoadjuntos de  $\mathcal{H}$ . La evolución del sistema nuevamente estará descrita por curvas en  $\mathcal{H}$ : si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$  es una de ellas, se tendrá

$$f(t) = \psi \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv |\psi(t, \mathbf{x})\rangle \otimes \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

(con la particularidad de que puede darse el caso en que  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  sean funciones constantes).

Por supuesto esta no es la única posibilidad, hay otras y para un espín diferente se necesita otro espacio, pero para la discusión del modelo supersimétrico sencillo que presentaremos esta descripción es suficiente.

#### 4. DESCRIPCIÓN DE PARTÍCULAS CON ESPÍN 1/2

¿Cómo explicar el resultado del experimento de Stern-Gerlach?. De acuerdo con la hipótesis de Goudsmith y Uhlenbeck, el fenómeno observado se debe a que el electrón tiene espín 1/2 y a que esta nueva magnitud tiene dos posibles “proyecciones”,  $\pm \frac{1}{2}$ . Un modelo para esta situación es el siguiente: consideremos el espacio

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \eta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

dotado del producto escalar complejo (hermítico)

$$\langle \eta, \zeta \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha^* \gamma + \beta^* \delta = \eta^\dagger \zeta,$$

con  $\eta^\dagger = (\eta^*)^\top$  la conjugación hermítica (la traspuesta de la matriz conjugada compleja). Diremos que  $\eta \in \mathbb{C}^2$  es un *estado de espín* si  $\|\eta\| = \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle} = 1$ . Identificaremos dos estados  $\eta, \zeta$  si existe un  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = 1$  tal que

$$\eta = z \cdot \zeta = \begin{pmatrix} z\gamma \\ z\delta \end{pmatrix}.$$

Es decir, si llamamos  $\sim$  a esta relación de equivalencia y  $\mathcal{U}(\mathbb{C}^2) = \{\eta \in \mathbb{C}^2 : \|\eta\| = 1\}$ , trabajaremos con el espacio cociente

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{U}(\mathbb{C}^2) / \sim$$

cuyos elementos se denominan *espinores bidimensionales* o *biespinores*. Sin embargo, por comodidad, denotaremos las clases de equivalencia  $[\eta]_\sim \in \mathcal{S}_2$  por sus representantes, es decir, escribiremos  $[\eta]_\sim = \eta$ .

<sup>4</sup>Que esto es así puede verse considerando que los resultados del experimento de Stern-Gerlach no dependen de la orientación espacial del dispositivo ni del estado de movimiento de éste.

¿Cuál es la estructura del espacio  $\mathcal{S}_2$ ? Observemos que

$$\mathcal{S}_2 = \{\eta \in \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4 : \|\eta\| = 1\} \simeq S^3$$

(la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^4$ ), y que la relación de equivalencia  $\sim$ , que determina los estados físicamente equivalentes, nos dice que se identifican todos los puntos que bajo la correspondencia anterior van a parar a  $S^1$  (la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^2$ ). Más concretamente, la órbita de un elemento cualquiera en el cociente  $\mathcal{S}_2$  es difeomorfa a  $S^1$ , pues

$$[\eta]_{\sim} = \{\zeta \in \mathbb{C}^2 : \exists |z| = 1, \zeta = z \cdot \eta\} \equiv S^1 \cdot \eta.$$

Por tanto, el espacio cociente (o espacio de órbitas) es

$$\mathcal{S}_2 = S^3 / S^1 \simeq S^2,$$

(donde  $S^2$  es la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ ) que resulta, por tanto, ser bidimensional. Como curiosidad, mencionaremos que esta construcción es equivalente a lo que en Matemáticas se conoce como fibración de Hopf de  $S^3$ .

Llamaremos *observables del espacio de espín* a los  $\mathbb{C}$ -endomorfismos autoadjuntos de  $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , esto es, a las aplicaciones  $\mathbb{C}$ -lineales autoadjuntas  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Del Álgebra Lineal, es sabido que una tal aplicación puede verse como una matriz  $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  con coeficientes complejos:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

tal que  $A^\dagger = A$  (se dice a veces que  $A$  es una matriz hermítica, y se representa por  $A \in \text{Her}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ). En particular, esto implica que  $A$  posee dos valores propios reales  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  (se escribe entonces  $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$ ). Además, dado uno de estos observables existen  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}^2$  vectores propios tales que

$$\begin{aligned} A\eta_1 &= \lambda_1 \cdot \eta_1 \\ A\eta_2 &= \lambda_2 \cdot \eta_2, \end{aligned}$$

y  $\{\eta_1, \eta_2\}$  es una *base ortonormal* compleja de  $\mathbb{C}^2$ .

Como su propio nombre indica, los observables están asociados a medidas sobre el sistema físico que representan los estados. Veamos cómo son los resultados de estas medidas: supongamos que un sistema se encuentra en el estado descrito por el vector  $\zeta \in \mathbb{C}^2$  y que se realiza una medida correspondiente al observable  $A$ , con  $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  y vectores propios  $\{\eta_1, \eta_2\}$ . Entonces, se puede escribir

$$\zeta = \alpha_1 \cdot \eta_1 + \alpha_2 \cdot \eta_2,$$

donde (por ser  $\{\eta_1, \eta_2\}$  ortonormal)

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1.$$

Pues bien, la hipótesis fundamental de la interpretación estándar de la Mecánica Cuántica dice que la medición del observable representado por  $A$  en el estado  $\zeta$  da como posibles resultados  $\lambda_1, \lambda_2$  con probabilidades respectivas  $|\alpha_1|^2, |\alpha_2|^2$  y, además, tras la medición, si se ha obtenido el resultado  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) el sistema pasa a estar descrito por el estado  $\eta_j$  ( $j = 1, 2$ ); a este fenómeno se le conoce como *colapso de la función de onda*. Dentro de este esquema,  $\alpha_j = \langle \eta_j, \zeta \rangle$  es la amplitud de probabilidad para la transición del estado  $\zeta$  al  $\eta_j$ , y  $|\alpha_j|^2$  es la probabilidad de que esto se produzca.



A  $\langle \eta | A | \eta \rangle = \langle \eta, A\eta \rangle \in \mathbb{R}$  se le llama *valor esperado* del observable  $A$  en el estado  $\eta$ . Observemos que

$$\langle \eta | A | \eta \rangle = |\alpha_1|^2 \lambda_1 + |\alpha_2|^2 \lambda_2,$$

de modo que el valor esperado de  $A$  oscila entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . También, fijémonos en que los valores esperados de un observable son independientes del representante elegido para describir el estado del sistema, ya que dos de ellos se relacionan por un  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z|^2 = z^* z = 1$ : si  $\eta$  y  $\zeta = z \cdot \eta$  son dos representantes de un mismo estado físico

$$\langle \zeta | A | \zeta \rangle = \langle z \cdot \eta, A(z \cdot \eta) \rangle = z^* z \langle \eta | A | \eta \rangle = \langle \eta | A | \eta \rangle.$$

Al igual que hicimos con los estados, ocupémonos ahora de la estructura del espacio de los observables. Si  $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  es uno de ellos, debe cumplir la condición  $A^\dagger = A$ , de modo que si su representación matricial es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

como

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix},$$

debe verificarse

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^* = r \in \mathbb{R} \\ \delta &= \delta^* = s \in \mathbb{R} \\ \beta &= \gamma^* = u + iv \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

o sea,

$$A = \begin{pmatrix} r & u + iv \\ u - iv & s \end{pmatrix}.$$

Por motivos que serán evidentes enseguida, nos interesará reparametrizar  $A$ , poniendo en lugar de  $r, s, u, v \in \mathbb{R}$  unos nuevos coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3$  relacionados con los anteriores por

$$\begin{aligned} a_0 + a_3 &= r \\ a_0 - a_3 &= s \\ a_1 &= u \\ a_2 &= v, \end{aligned}$$

así que nuestro observable más general  $A$  pasa a ser

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 + ia_2 \\ a_1 - ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Resulta entonces que el espacio de todos los observables puede verse como

$$\text{Obs} = \{A \in \text{End}(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) : A = A^\dagger\} \simeq \mathbb{R}^4,$$

que, a su vez, tiene estructura de espacio vectorial *real* y de (6) se puede hallar fácilmente una base explícita. De hecho, si se consideran las llamadas *matrices de Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y se escribe  $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$  para la matriz identidad, un observable  $A$  se expresa como

$$A = a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = a_0 \mathbf{I} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  (esto es sólo una notación cómoda).

Ahora, es muy fácil comprobar<sup>5</sup> que si se expresa  $A$  a partir de los parámetros  $a_0, \mathbf{a}$ , sus dos posibles valores propios son

$$\lambda_{\pm} = a_0 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = a_0 \pm \|\mathbf{a}\|. \quad (7)$$

Si  $\|\mathbf{a}\| = 0$ , los valores propios son degenerados e iguales a  $a_0$ .

Por definición, el operador *observable de espín 1/2* (o *momento de espín 1/2*) es el vector de operadores autoadjuntos  $S$  dado por  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Generalizando la descripción clásica de la sección 2, una partícula con momento de espín  $\frac{1}{2}$  se comporta como si tuviera un momento magnético asociado a ese espín, de la misma forma que tiene asociado un momento magnético a su momento angular orbital: se introduce pues un *momento magnético asociado al espín*  $\mathbf{m}$ , dado por

$$\mathbf{m} = \mu_B \mathbf{S},$$

es decir, el nuevo operador es  $\mathbf{m} = \frac{\mu_B}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , donde  $\mu_B$  es una constante que se conoce como *magnetón de Bohr*. Lo que interesa, por lo que respecta a la fuerza que actúa sobre la partícula, es conocer los valores propios de la proyección de  $\mathbf{m}$  sobre una dirección dada en el espacio (cfr. (1)): si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  es una tal dirección, resulta que la proyección del operador  $\mathbf{m}$  es

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{u} = \frac{\mu_B}{2}(u_1 \cdot \sigma_1 + \sigma_2 \cdot u_2 + \sigma_3 \cdot u_3) = \frac{\mu_B}{2} \begin{pmatrix} u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & -u_3 \end{pmatrix},$$

y de acuerdo con (7), los valores propios de esta proyección son

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{\mu_B}{2} \|\mathbf{u}\|,$$

así que si  $\mathbf{u}$  es unitario obtenemos  $\lambda_{\pm} = \pm \frac{\mu_B}{2}$ . Es habitual tomar  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{z}}$ , en cuyo caso se escribe

$$m_z = \pm \frac{\mu_B}{2}$$

para los valores propios de la proyección del momento magnético de espín.

Por tanto, este formalismo da cuenta de los resultados del experimento de Stern-Gerlach: en un haz de átomos de plata, los electrones “exteriores” cuyo espín es  $1/2$  se hallarán en uno de los dos estados posibles para la proyección del espín, el dado por el valor propio  $\frac{\mu_B}{2}$  o el dado por  $-\frac{\mu_B}{2}$ , y las fuerzas que actúan en cada caso serán colineales pero de sentidos opuestos, es decir, los átomos se desviarán en uno de los dos sentidos (arriba o abajo) dependiendo de si el estado del electrón “exterior” se corresponde con el vector propio correspondiente a  $\frac{\mu_B}{2}$  o  $-\frac{\mu_B}{2}$ .

Por otra parte, tenemos que los estados del espacio de espín  $\mathbb{C}^2$  se pueden expresar en la base ortonormal formada por los vectores propios de  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}$ , llamémoslos  $\eta_{\pm}$ , y que están definidos por

$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}) \eta_{\pm} = \lambda_{\pm} \eta_{\pm}.$$

Así, para todo  $\zeta \in \mathbb{C}^2$  se puede poner  $\zeta = \alpha_1 \eta_+ + \alpha_2 \eta_-$ , con  $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$ . Como ya hemos mencionado, es común tomar  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{z}}$  y escribir  $\eta_+ = \eta_{\uparrow}, \eta_- = \eta_{\downarrow}$  (con sus correspondientes  $\alpha_1 = \alpha_{\uparrow}, \alpha_2 = \alpha_{\downarrow}$ ), de modo que un estado de espín será lo que se conoce como un “bispinor”:

$$\zeta = \begin{pmatrix} \alpha_{\uparrow} \\ \alpha_{\downarrow} \end{pmatrix} = \alpha_{\uparrow} \eta_{\uparrow} + \alpha_{\downarrow} \eta_{\downarrow},$$

<sup>5</sup>Ejercicio para el lector

y las funciones de onda completas (5) se escriben entonces en la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= |\psi(t, \mathbf{x})\rangle \otimes (\alpha_+ |+\rangle + \alpha_- |-\rangle) \\ &= \alpha_+ |t, \mathbf{x}, +\rangle + \alpha_- |t, \mathbf{x}, -\rangle \end{aligned} \quad (8)$$

donde, obviamente,  $|t, \mathbf{x}, \pm\rangle = |\psi(t, \mathbf{x})\rangle \otimes |\pm\rangle$ .

## 5. LAS ECUACIONES DE SCHRÖDINGER Y DIRAC-HEISENBERG

Al igual que la dinámica en Mecánica Clásica viene determinada por la ecuación de Newton para una trayectoria en el espacio euclideo tridimensional  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , que para fuerzas que derivan de un potencial se escribe en función del operador gradiente  $\nabla$  como

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V \circ \mathbf{x},$$

en Mecánica Cuántica toda partícula interaccionando con un potencial  $V(\mathbf{x})$  (supongamos por simplicidad potenciales dependientes sólo de la posición) viene descrita por su función de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ <sup>6</sup>, que satisface la llamada *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{x}) \right) \Psi(\mathbf{x}, t) \equiv H \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

aquí,  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{x})$  es el observable denominado *Hamiltoniano cuántico del sistema*. Aplicando el conocido método de separación de variables (es decir, suponiendo que  $\Psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x})F(t)$ ), esta ecuación puede reducirse a otra más sencilla, denominada *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*:

$$H\Phi(\mathbf{x}) = E\Phi(\mathbf{x}), \quad (10)$$

donde  $E$  es una constante real<sup>7</sup> que, por analogía con el caso clásico, se identifica con la energía del sistema. Esta ecuación puede generalizarse al caso de que existan “variables internas” como el espín; de hecho, recordando que el espacio de Hilbert que describe los estados del sistema (por ejemplo para una partícula de espín 1/2) tiene la estructura  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ , lo anterior debería escribirse:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(x, t) = \left( \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V_{L^2(\mathbb{R})} \right) \otimes V_{\mathbb{C}^2} \right) \Psi(x, t),$$

esto es, el Hamiltoniano sería

$$H = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V_{L^2(\mathbb{R})} \right) \otimes V_{\mathbb{C}^2}.$$

En concreto, para una partícula de espín 1/2 en el seno de un campo magnético  $\mathbf{B}$ , ya hemos visto que es

$$V_{\mathbb{C}^2} = \mu_B \mathbf{S} \cdot \mathbf{B},$$

<sup>6</sup>Para explicar la aparición de  $t$  recordemos que, realmente, cuando decimos “función de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ ” nos estamos refiriendo a una “curva en el espacio de estados  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ ”. La ecuación de Schrödinger, como ecuación dinámica, es una ecuación para estas curvas pero el uso ha consagrado la identificación de la curva  $\Psi$  con su imagen.

<sup>7</sup>Observemos que  $E$  resulta ser un valor propio del observable  $H$  y éste, por hipótesis, es un operador autoadjunto.

y así, cuando sólo interesa estudiar la evolución del factor de la función de onda completa perteneciente a  $\mathbb{C}^2$ , se dice que el Hamiltoniano de una partícula de espín  $1/2$  en un campo magnético  $\mathbf{B}$  es

$$H = \mu_B \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}.$$

Por tanto, vemos que es el Hamiltoniano el que determina toda la dinámica del sistema, que básicamente se reduce a un problema de valores propios para este operador.

Heisenberg y, de manera independiente, Dirac proporcionaron una ecuación básica para la dinámica cuántica diferente de la de Schrödinger<sup>8</sup>. Para comprender su significado, recordemos brevemente la formulación de la dinámica Newtoniana en términos de los corchetes de Poisson. Suponiendo una partícula que se desplaza en  $\mathbb{R}^3$  siguiendo la curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  bajo la influencia de un potencial  $V \in \mathcal{C}^\infty(U)$  (con  $U \subset \mathbb{R}^3$  una cierta región que podemos suponer abierta), la ecuación de Newton es

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt}(t) = -\nabla V \circ \mathbf{x}(t).$$

Introduciendo la variable  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  y llamando  $\tilde{x}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$  a la curva en  $U \times \mathbb{R}^3$  determinada por  $\mathbf{x}(t)$  y su derivada<sup>9</sup>, el sistema anterior se transforma en:

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = -\nabla V \circ \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (11)$$

En términos del Hamiltoniano del sistema, que es la función  $H \in \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^3)$  dada por

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{x}),$$

las ecuaciones (11) se escriben (para  $i \in \{1, 2, 3\}$ )

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial v^i} \circ \tilde{x}(t) \\ \frac{dv^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial x^i} \circ \tilde{x}(t) \end{cases}, \quad (12)$$

que son conocidas como ecuaciones de Hamilton. Para resolver estas ecuaciones, que son equivalentes a las de Newton para el caso que estamos considerando, es preciso dar unas condiciones iniciales sobre  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{v}(t)$ . En otras palabras, para determinar el estado futuro de un sistema clásico es necesario tener las ecuaciones de evolución (12) y conocer  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  en un instante dado  $t_0$ . Por eso, en Mecánica Clásica a  $U \times \mathbb{R}^3$  se le denomina espacio de estados del sistema (a veces, también se le denomina espacio de fases, aunque no son exactamente lo mismo, pues el espacio de fases es un subfibrado del cotangente, cfr. la nota a pie de página precedente).

Supongamos ahora que queremos evaluar una función  $f$  a lo largo de una trayectoria  $\tilde{x}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$  en el espacio  $U \times \mathbb{R}^3$ , donde introducimos coordenadas

<sup>8</sup>Bajo condiciones muy generales, las dinámicas proporcionadas por ambas ecuaciones son equivalentes, aunque esto no es cierto con toda generalidad. La Mecánica Cuántica en la formulación de Born, Heisenberg, Jordan y Dirac es más general que la de Schrödinger.

<sup>9</sup>En realidad,  $\tilde{x}(t)$  es el levantamiento de la curva  $\mathbf{x}(t)$  al fibrado cotangente  $T^*U = \bigsqcup_{\mathbf{x} \in U} T_{\mathbf{x}}^*U$ , donde  $\mathbf{v}(t) \in T_{\mathbf{x}(t)}U$  se identifica con su imagen mediante el isomorfismo  $T_{\mathbf{x}(t)}^*U \simeq T_{\mathbf{x}(t)}U$  inducido por la métrica asociada a la energía cinética. Pero para el propósito de estas notas, podemos ignorar estas sutilezas.

$\{x^1, x^2, x^3, v^1, v^2, v^3\}$ . Se tiene que, aplicando la regla de la cadena y las ecuaciones de Hamilton,

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \tilde{x})}{dt}(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{\tilde{x}(t)} \frac{dx^i}{dt}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial v^j} \right|_{\tilde{x}(t)} \frac{dv^j}{dt}(t) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{\tilde{x}(t)} \frac{\partial H}{\partial v^i}(\tilde{x}(t)) - \left. \frac{\partial f}{\partial v^i} \right|_{\tilde{x}(t)} \frac{\partial H}{\partial x^i}(\tilde{x}(t)) \quad (13) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial v^i} - \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right) \circ \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

Esto se suele escribir en forma más compacta omitiendo la trayectoria particular  $\tilde{x}(t)$  e introduciendo el llamado corchete de Poisson, una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal  $\{.,.\} : \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^3)$  definida por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial v^i} - \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right). \quad (14)$$

Las ecuaciones (13) resultan ser, entonces,

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}, \quad (15)$$

llamada la ecuación de Poisson. Lo que hizo Dirac fue postular una ecuación dinámica cuántica análoga a (15), pero reemplazando los observables clásicos (en general funciones de  $\mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ ) por observables cuánticos (operadores de  $End_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{R}^n))$ ). Para el caso  $n = 1$ , esto se traduce en las llamadas “reglas de cuantización canónicas”

$$\begin{aligned} x &\mapsto x \cdot \\ p &\mapsto -i\hbar \frac{d}{dx}. \end{aligned}$$

y el corchete de Poisson por el llamado conmutador cuántico  $[.,.]$  definido mediante:

$$[A, B] = \frac{i}{\hbar} (A \circ B - B \circ A), \quad \forall A, B \in End_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{R}))$$

(véase el Apéndice B, donde se reproduce el razonamiento de Dirac para llegar a esta expresión) de manera que si  $A \in End_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{R}))$  es un observable cualquiera que depende de posiciones, velocidades e implícitamente del tiempo (pero *no* explícitamente) su evolución está dada por la *ecuación de Dirac-Heisenberg*:

$$\frac{dA}{dt} = [H, A],$$

siendo  $H \in End_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{R}))$  el Hamiltoniano cuántico del sistema.

## 6. EL TEOREMA DE CONEXIÓN ESPÍN-ESTADÍSTICA

Mediante experimentos del tipo Stern-Gerlach, pronto se pudo determinar que las partículas elementales se podían clasificar según su valor del espín en dos grupos: aquellas con espín entero, llamadas *bosones*, y aquellas con espín semientero, llamadas *fermiones*. Ejemplos de la primera clase son los fotones (espín 1), y de la segunda, como ya hemos mencionado, los electrones (espín 1/2). La denominación “bosón” y “fermión” se debe a la diferente estadística que obedecen estas partículas: de Bose-Einstein o de Fermi-Dirac, respectivamente. Con el fin de explicar esta frase, supongamos ahora que disponemos de un conjunto de partículas indistinguibles,

tales como los electrones en un haz de átomos de plata, aunque para simplificar la discusión sólo consideraremos dos de ellas. La propiedad de indistinguibilidad se traduce en que

$$H(1, 2) = H(2, 1), \quad (16)$$

donde “1” representa todo el conjunto de parámetros (llamados “números cuánticos” en Física) necesarios para describir la partícula 1 (incluido su espín), y lo mismo “2” para la partícula 2. La ecuación de Schrödinger para este sistema de dos partículas se escribe entonces como  $H(1, 2)\Psi(1, 2) = E\Psi(1, 2)$ , aunque al no importar cómo etiquetemos a las partículas, esto es equivalente a  $H(2, 1)\Psi(2, 1) = E\Psi(2, 1)$ .

Ahora bien, haciendo uso de (16), también resulta

$$H(1, 2)\Psi(2, 1) = E\Psi(2, 1). \quad (17)$$

Llegados a este punto, conviene introducir el llamado *operador de intercambio*  $P_{12}$ , que aplicado a un estado intercambia todas las coordenadas (espaciales y espín) de las partículas 1 y 2, es decir,  $P_{12}\Psi(1, 2) = \Psi(2, 1)$ . Así, de (17)

$$HP_{12}\Psi(1, 2) = E\Psi(2, 1) = EP_{12}\Psi(1, 2) = P_{12}E\Psi(1, 2) = P_{12}H\Psi(1, 2),$$

o, lo que es lo mismo en términos del conmutador entre operadores<sup>10</sup>, definido por  $[A, B]_- = A \circ B - B \circ A$ ,

$$[H, P_{12}]_- = 0. \quad (18)$$

Notemos que, como hemos señalado en la sección precedente, la estructura formal de la Mecánica Cuántica en la forma en que la estamos utilizando (à la Heisenberg), es idéntica a la de la Mecánica Clásica en la formulación de Poisson reemplazando el corchete clásico de Poisson  $\{_, _\}$  por el conmutador cuántico  $[_, _]$ . En particular, la evolución temporal de las magnitudes representadas por los operadores como  $P_{12}$  viene dada por su conmutador con el Hamiltoniano, por lo que (18) nos dice que el operador de intercambio es una constante del movimiento. Otra propiedad importante de este operador es su idempotencia:  $(P_{12})^2\Psi(1, 2) = \Psi(1, 2)$ , así que sus valores propios son  $\pm 1$ ; sus funciones propias son las combinaciones simétricas y antisimétricas

$$\begin{aligned} \Psi^S(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi(1, 2) + \Psi(2, 1)) \\ \text{y} \\ \Psi^A(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi(1, 2) - \Psi(2, 1)). \end{aligned} \quad (19)$$

El que  $P_{12}$  sea una constante del movimiento, implica que un estado que es simétrico en un instante inicial siempre será simétrico y que un estado antisimétrico siempre seguirá siendo antisimétrico. Lo verdaderamente importante (tanto que a su descubridor, Pauli, le valió el Nobel en 1945), es que *la simetría o antisimetría bajo el intercambio de dos partículas es una característica de las partículas*, y no algo que se pueda decidir en la preparación del estado inicial. Esta propiedad se conoce como teorema de conexión espín-estadística<sup>11</sup> y afirma que:

<sup>10</sup>Sobre la notación: muchos autores denominan  $[_, _]$  a lo que nosotros estamos llamando conmutador de endomorfismos,  $[_, _]_-$ . Estos autores escriben la ecuación de Dirac-Heisenberg como

$$i\hbar \frac{dA}{dt} = [A, H].$$

<sup>11</sup>A veces se habla del “principio” de conexión espín-estadística, pero hay que hacer notar que uno de los logros (quizás *el* logro) de la teoría cuántica de campos axiomática, es que este enunciado se deriva como un teorema a partir de unos postulados, véase [Str-Wig 89].

1. Los sistemas consistentes en partículas idénticas con *espín semientero* se describen mediante funciones de onda antisimétricas, y se dice que obedecen la *estadística de Fermi-Dirac*.
2. Los sistemas consistentes en partículas idénticas con *espín entero* se describen mediante funciones de onda simétricas, y se dice que obedecen la *estadística de Bose-Einstein*.

## 7. PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN Y NÚMEROS DE OCUPACIÓN

Una consecuencia inmediata del teorema de conexión espín-estadística que *en un sistema no puede haber más de dos fermiones en un estado de energía, momento angular, paridad, etc... definidos*<sup>12</sup>, limitación que no existe en el caso de los bosones. Este enunciado, se conoce como *Principio de exclusión de Pauli*. Vamos a ver con algo de detalle esta implicación, ya que es la clave para la introducción de las ideas de la Supersimetría (al menos por lo que respecta a estas notas).

Supongamos pues un sistema de  $N$  fermiones *indistinguibles* (digamos  $N$  electrones), descritos por las funciones de onda respectivas  $\psi_1(\nu_1), \dots, \psi_N(\nu_N)$  (pensemos que en  $\nu$  van incluidos todos los números cuánticos del sistema, pero esto son sólo etiquetas: ¡las partículas son indistinguibles!). Recordemos de la sección 3 que esto significa, en el ejemplo de partículas de espín  $\frac{1}{2}$  (recuérdese (8))

$$\psi_i(\nu_i) = \alpha_+ |t, \mathbf{x}, +\rangle + \alpha_- |t, \mathbf{x}, -\rangle.$$

El intento naíf de formar una función de onda común a partir de las de cada partícula es, obviamente, el producto tensorial  $\psi_1(\nu_1) \otimes \dots \otimes \psi_N(\nu_N)$ , pero lamentablemente esta función no satisface el requisito de antisimetría. Una manera fácil de conseguir que si se cumpla, es mediante el operador de antisimetrización<sup>13</sup>: se toma la función  $\Psi$  definida por

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sig}(\sigma) \psi_1(\nu_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes \psi_N(\nu_{\sigma(N)})$$

donde  $S_N$  es el grupo de permutaciones de  $N$  elementos y  $\text{sig}(\sigma)$  es la signatura de la permutación  $\sigma$ . Es claro que  $\Psi$  es antisimétrica bajo el intercambio de las coordenadas de dos partículas cualesquiera (¡es la generalización de (19)!). De hecho,  $\Psi$  se puede escribir como un determinante, el llamado *determinante de Slater* (donde el producto de los factores debe entenderse como producto tensorial):

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_1(\nu_1) & \psi_1(\nu_2) & \cdots & \psi_1(\nu_{N-1}) & \psi_1(\nu_N) \\ \psi_2(\nu_1) & \psi_2(\nu_2) & \cdots & \psi_2(\nu_{N-1}) & \psi_2(\nu_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \psi_{N-1}(\nu_1) & \psi_{N-1}(\nu_2) & \cdots & \psi_{N-1}(\nu_{N-1}) & \psi_{N-1}(\nu_N) \\ \psi_N(\nu_1) & \psi_N(\nu_2) & \cdots & \psi_N(\nu_{N-1}) & \psi_N(\nu_N) \end{vmatrix},$$

<sup>12</sup>En un hipotético sistema de tres o más fermiones, dos de ellos tendrían la variable de espín con valores opuestos y el tercero repetiría los valores de esta variable, lo cual, por la antisimetría de la función de onda, implicaría que ésta es nula

<sup>13</sup>Fijémonos en que este operador no es otro que el operador *Alt* que pasa del producto tensorial al exterior sobre módulos o espacios vectoriales.

de modo que es manifiesto que la función de onda total  $\Psi$  se anula idénticamente si dos cualesquiera de las funciones  $\psi_i(\nu_j)$  son la misma, es decir: en un sistema de  $N$  fermiones no puede haber dos de ellos en el mismo estado cuántico<sup>14</sup>.

Naturalmente, este proceso no agota todas las posibilidades de obtener funciones de onda totales para un sistema de fermiones que sean antisimétricas. Por ejemplo, podemos tomar combinaciones lineales de determinantes de este tipo y el resultado es automáticamente antisimétrico. Esta idea es la base de una construcción más general llamada en Física *espacio de Fock*. Veamos cómo se describe en Física: nuestras funciones de onda pertenecen a un cierto espacio de Hilbert separable que, como buen espacio vectorial provisto de producto escalar complejo (¡y con respecto a la métrica inducida por el cual es completo!) posee una base numerable y ortonormal de funciones,  $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Los estados de una partícula de nuestro sistema se pueden expresar como el conjunto de límites de todas las combinaciones lineales de las  $\phi_j(\nu)$  (tomadas de una en una, es decir, cosas del tipo  $\alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_k\phi_k + \dots$ ), y se puede probar que los estados antisimétricos de  $N$  partículas están formados por todas las combinaciones lineales de los determinantes de Slater obtenidos tomando  $N$  funciones de entre las  $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Éste es el llamado espacio de Fock de orden  $N$  del sistema<sup>15</sup>, y el espacio de Fock total es la clausura de la suma directa de todos ellos para los diferentes valores de  $N$ . En realidad, como vemos, el espacio de Fock es el resultado de tomar la clausura del cociente del álgebra tensorial del espacio de Hilbert (considerado como simple espacio vectorial) por el ideal engendrado por la antisimetrización aplicada a los elementos generadores, es decir: desde un punto de vista matemático no es otra cosa que la clausura del álgebra exterior del espacio de Hilbert original.

Vamos a introducir una notación más cómoda para estas funciones de onda antisimétricas de  $N$  fermiones, basada en el hecho de que cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isomorfo a un espacio de sucesiones (véase [Von 32]). Supongamos que los diferentes estados *base* que puede tener *una sola* partícula se enumeran como

$$\{\psi_1(\nu_1), \psi_2(\nu_2), \psi_3(\nu_3), \dots\} = \{\psi_i(\nu_i)\}_{i \in \mathbb{N}};$$

como ya hemos mencionado, el Principio de exclusión de Pauli hace que en cada uno de los estados descritos por  $\psi_1(\nu_1), \dots, \psi_N(\nu_N)$  haya una o ninguna partícula, pero nunca dos o más. Una manera muy conveniente de escribir las funciones, pues, es indicar los estados que están “ocupados” : aquellos en los que se encuentra alguna partícula. De este modo, en general escribiremos

$$|n_1, n_2, \dots\rangle$$

para la función de onda total que describe a  $n_1$  partículas en el estado  $\psi_1$ ,  $n_2$  partículas en el estado  $\psi_2$ , etc. La particularidad es que las  $n_j$  sólo pueden tomar los valores 1 y el resto se sobreentiende que es 0 (hay una representación similar para los estados de bosones, pero estos no tienen esa limitación:  $n_j$  puede ser cualquier

<sup>14</sup>Esto sólo es cierto para fermiones en un mismo sistema. No se aplica a fermiones cuyas funciones de onda están completamente incorrelacionadas.

<sup>15</sup>Obsérvese que estamos suponiendo  $N$  partículas *indistinguibles*. Cuando no es así, la estructura del espacio de estados total si es la del producto tensorial de los espacios individuales de cada partícula.



natural). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} |1_1\rangle &= |1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\rangle = \psi_1(\nu_1) \\ |1_1, 1_3\rangle &= |1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\rangle = \frac{1}{2} (\psi_1(\nu_1) \otimes \psi_3(\nu_3) - \psi_3(\nu_3) \otimes \psi_1(\nu_1)). \end{aligned}$$

En cualquiera de los casos,  $n_1 + n_2 + \dots = N$ . Esta manera de describir los estados del sistema, con mucha propiedad se llama *representación por el número de ocupación*.

## 8. EJEMPLO: UN BOSÓN Y UN FERMIÓN EN UNA CAJA

Consideremos un bosón (digamos, un pión  $\pi^0$  cuya carga y espín valen 0) y un fermión (un  $e^-$ , con carga  $-1$  y espín  $1/2$ ), sin interacción entre ellos, moviéndose a lo largo de una recta y confinados a la región  $]0, L[$ . La descripción matemática de esta situación se basa en tomar un potencial  $C^\infty$  a trozos (llamado de “pozo cuadrado infinito” por razones obvias) de la forma

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \geq L \text{ ó } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < L, \end{cases}$$

que separa la recta en tres regiones:  $]-\infty, 0]$ ,  $]0, L[$ ,  $[L, +\infty[$ . Sólo la segunda de ellas tendrá interés desde el punto de vista del cálculo (¡y desde el físico también!), pues obviamente la función de onda de cualquiera de las partículas en las otras dos es 0.

Olvidémonos por un momento del espín de las partículas. Busquemos soluciones separables a la ecuación de Schrödinger para  $V(x)$ , esto es, en la forma  $\psi(t, x) = \phi(x) \cdot f(t)$ . Por lo que respecta a su comportamiento espacial, cualquiera de ellas vendrá descrita por una  $\phi(x) \in L^2(]0, L[)$  que satisfaga la ecuación de Schrödinger en la región  $]0, L[ \subset \mathbb{R}$  (en la cual  $V(x) = 0$ , cfr. (9), (10)):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) = E\phi(x), \quad (20)$$

donde suponemos que  $E$  —la energía de la partícula— es positiva, en tanto que la parte temporal está descrita por una  $f(t) \in L^2(]0, L[)$  con

$$f'(t) = -\frac{iE}{\hbar}f(t),$$

o sea

$$f(t) = \exp(-iEt/\hbar),$$

de modo que la función de onda espacio-temporal sería

$$\psi(t, x) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar).$$

Ocupémonos ahora de las soluciones a (20). El polinomio característico de la ecuación es  $P(\lambda) = \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + E$ , con raíces imaginarias  $\lambda = \pm i\sqrt{2mE}/\hbar$ , por lo que una base del espacio de soluciones es la trigonométrica y existirán unas constantes  $A, B$  tales que

$$\phi(x) = A \cos\left(x\sqrt{2mE}/\hbar\right) + B \sin\left(x\sqrt{2mE}/\hbar\right).$$

En definitiva, nuestra función de onda espacio-temporal para cualquiera de las partículas en la caja tendrá que ser de la forma

$$\psi(t, x) = \begin{cases} \left( A \cos\left(\frac{x\sqrt{2mE}}{\hbar}\right) + B \sin\left(\frac{x\sqrt{2mE}}{\hbar}\right) \right) e^{-iEt/\hbar}, & (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R} \\ 0, & x \geq L \text{ ó } x \leq 0. \end{cases}$$

Las constantes  $A, B$  se pueden determinar por las condiciones de frontera, provenientes del hecho de que el potencial está definido por secciones pero queremos que las soluciones correspondientes a cada sección se empalmen adecuadamente para dar funciones  $C^\infty$  (en inglés, a estas condiciones se las denomina “matching conditions”):

$$\psi(t, 0) = 0 = \psi(t, L), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de donde es inmediato que

$$A = 0 \text{ y } B \sin\left(L\sqrt{2mE}/\hbar\right) = 0.$$

La segunda condición no implica que la constante  $E$  (en principio arbitraria) sea nula, sino que  $L\sqrt{2mE}/\hbar = n\pi$  con  $n \in \mathbb{Z} - 0$ , esto es

$$E = \frac{2n^2}{m} \left( \frac{\hbar\pi}{L} \right)^2,$$

de manera que las posibles energías de las partículas no pueden tomar valores arbitrarios, sino sólo algunos de ellos parametrizados por  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ : ésta es la famosa *cuantización de la energía*!. Fijémonos en que, por aparecer la  $n$  elevada al cuadrado, podemos tomar<sup>16</sup>  $n \in \mathbb{N}$ . Escribiremos  $E_n$  cuando queramos hacer explícito el valor concreto a que nos referimos.

Con esto, la función de onda pasa a ser

$$\psi(t, x) = \begin{cases} B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-i\frac{\hbar^2 n^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t\right), & (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R} \\ 0, & x \geq L \text{ ó } x \leq 0. \end{cases}$$

Para determinar la constante  $B$ , utilizaremos el hecho de que la función de onda del sistema debe estar normalizada a 1:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t, x) \psi^*(t, x) dx = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En nuestro caso, la ecuación precedente se reduce a

$$\int_0^L B^2 \sin^2(\omega x) dx = 1, \quad \text{donde } \omega = \frac{n\pi}{L},$$

esto es

$$\left[ B^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega x) \right) \right]_0^L = 1,$$

de donde resulta

$$B = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{i\varphi},$$

---

<sup>16</sup>Observemos que el valor  $n = 0$  no es admisible físicamente, pues conduce a una función de onda nula y ésta no puede cumplir el requisito de normalización (4)

con  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Por tanto, la función de onda espacio-temporal de cualquiera de las partículas será una de la familia, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\psi_n(t, x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-i\left(\frac{\hbar^2 n^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t - \varphi\right)\right), & (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R} \\ 0, & x \geq L \text{ ó } x \leq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Nótese la indeterminación de la función de onda  $\psi_n(t, x)$  introducida por el factor de fase  $e^{i\varphi}$ . La notación habitual (en términos de los bra y kets de Dirac) es  $\psi_n(t, x) = |t, x, n\rangle$ .

Para el pión  $\pi^0$ , que tiene espín 0, éstas son las funciones de onda totales. Ahora podemos considerar la inclusión del espín para el caso del fermión, que dará como función de onda total el producto tensorial de  $\psi_n(t, x)$  por una de las funciones espinoriales  $\zeta = \alpha\eta_{\uparrow} + \beta\eta_{\downarrow}$  que ya hemos estudiado. Con mayor precisión, para el  $\pi^0$  tenemos que el único número cuántico es  $n$ —esto es,  $\nu$  es un conjunto de parámetros con un único elemento:  $n$ — y los estados base serán  $\{\psi_i(\nu_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ , donde para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_i(t, x)$  está dada por (21). Abreviadamente, se suelen denotar estas funciones de onda por  $\{|i\rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Para el fermión, podemos numerar los estados base, de acuerdo con (8), como

$$\{|1, +\rangle, |1, -\rangle, |2, +\rangle, |2, -\rangle, \dots\},$$

donde, recordemos,  $|i, \pm\rangle = |\psi_i(t, x)\rangle \otimes |\pm\rangle$ .

## 9. EL ÁLGEBRA DE LOS OPERADORES DE CREACIÓN Y ANIQUILACIÓN

Volvamos al estudio de un conjunto de  $N$  partículas fermiónicas indistinguibles. Nos interesa ahora una situación más dinámica, en la que los fermiones de nuestro sistema pueden pasar de un estado a otro. Esta es la situación que uno estudia, por ejemplo, en teoría cuántica de campos (QFT), donde se va incluso un paso más allá y se admite no sólo que los estados de las diferentes partículas puedan cambiar, sino también el propio número de éstas. Salvo algunas particularidades técnicas (¡muy importantes!) las ideas centrales de la QFT en su presentación estándar se basan en una generalización del formalismo que vamos a introducir ahora para describir cambios de estado, a uno que describa procesos de creación y aniquilación de las propias partículas.

Definimos, formalmente, un *operador creación* que crea un estado de una partícula en el modo  $k$ -simo,  $b_k^\dagger$ :

$$b_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots\rangle,$$

y un *operador aniquilación* que destruye un modo,  $b_k$ :

$$b_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle.$$

Naturalmente, hay que establecer alguna regla adicional para estos operadores, pues no podemos violar el Principio de exclusión y tener más de una partícula en el mismo estado. Como además sabemos (por la misma razón) que los  $n_j$  de partida no pueden valer más de 1, tenemos las reglas obvias:

$$(b_k^\dagger)^2 = 0, \text{ y } (b_k)^2 = 0,$$

actuando sobre cualquier estado. Así, tendremos, por ejemplo (si  $|0\rangle$  representa el estado en que todos los modos del sistema están desocupados):

$$b_k^\dagger |0\rangle = |1_k\rangle = \psi_k(\nu)$$

y también<sup>17</sup>,

$$b_{k'}^\dagger b_k^\dagger |0\rangle = |1_{k'}, 1_k\rangle = \frac{1}{2} (\psi_k(\nu_k) \otimes \psi_{k'}(\nu_{k'}) - \psi_{k'}(\nu_{k'}) \otimes \psi_k(\nu_k)).$$

Fijémonos en que la antisimetría de la función de onda total (i.e:  $|1_{k'}, 1_k\rangle = -|1_k, 1_{k'}\rangle$ ) implica que

$$b_{k'}^\dagger b_k^\dagger |0\rangle = -b_k^\dagger b_{k'}^\dagger |0\rangle, \quad (22)$$

es decir:

$$(b_k^\dagger b_{k'}^\dagger + b_{k'}^\dagger b_k^\dagger) |0\rangle = 0.$$

No hay nada de especial en este cálculo que se refiera al  $|0\rangle$ , de hecho, podemos escribir con generalidad

$$b_k^\dagger b_{k'}^\dagger + b_{k'}^\dagger b_k^\dagger = 0,$$

y es costumbre abreviar esta expresión escribiéndola en términos del anticonmutador  $[\cdot, \cdot]_+$ , definido para un par de operadores  $A, B$  como  $[A, B]_+ = A \circ B + B \circ A$ :

$$[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger]_+ = 0.$$

Así, decimos que *los operadores de creación anticonmutan entre ellos* (observemos que el caso  $k = k'$  también está trivialmente incluido). De manera totalmente análoga se ve que también *los operadores de aniquilación anticonmutan entre ellos*:

$$[b_k, b_{k'}]_+ = 0,$$

así que para establecer el álgebra de los operadores de creación y aniquilación, debemos estudiar qué ocurre con su anticonmutador cuando cada uno es de un tipo. Es trivial que si  $k \neq k'$  se tiene:

$$[b_k^\dagger, b_{k'}]_+ = 0,$$

luego podemos centrar nuestra atención en el caso de  $[b_k^\dagger, b_k]_+$ .

Consideremos las siguientes actuaciones, que se deducen de las definiciones y del Principio de exclusión de Pauli:

$$\begin{cases} b_k^\dagger b_k |0_k\rangle = 0, & b_k b_k^\dagger |0_k\rangle = |0_k\rangle \\ b_k^\dagger b_k |1_k\rangle = |1_k\rangle, & b_k b_k^\dagger |1_k\rangle = 0; \end{cases} \quad (23)$$

sumándolas con coeficientes arbitrarios  $\alpha$  y  $\beta$ , resulta:

$$\alpha(b_k^\dagger b_k + b_k b_k^\dagger) |0_k\rangle + \beta |1_k\rangle = \alpha |0_k\rangle + \beta |1_k\rangle,$$

así que para operaciones efectuadas sobre cualquier vector que describa el modo  $k$ -simo,

$$b_k^\dagger b_k + b_k b_k^\dagger = 1.$$

Por supuesto, el modo  $k$ -simo es totalmente arbitrario, es decir, realmente tenemos un resultado general:

$$[b_k^\dagger, b_k]_+ = 1.$$

---

<sup>17</sup>Recuérdese que el orden de actuación de los operadores (que se traduce en el orden en que se toman los términos del producto tensorial) es importante.

De forma unificada, podemos resumir las fórmulas obtenidas diciendo que

$$[b_k^\dagger, b_{k'}]_+ = \delta_{kk'}. \quad (24)$$

Además, de (23) resulta evidente que el operador  $n_k = b_k^\dagger b_k$  juega el papel de *operador número de ocupación del estado  $k$ -simo*, y de hecho así se le conoce. Estos operadores son muy importantes en el esquema algebraico de la Mecánica Cuántica; de hecho, es bien sabido que definiendo el *operador número total*  $N = \sum_k n_k$ , el

Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico (bosónico) se expresa como

$$H = N + \frac{1}{2}$$

(véase, por ejemplo, [Gas 03] para profundizar en este aspecto).

Hasta ahora hemos trabajado con fermiones, pero el mismo análisis formal puede llevarse a cabo con bosones, partículas para las cuales no existe la restricción impuesta por el Principio de exclusión de Pauli. Revisando, o mejor dicho, repitiendo el argumento que hemos dado y haciendo los cambios pertinentes<sup>18</sup> (especialmente en (22), ¡donde ahora hay que tener en cuenta la *simetría!*), es fácil convencerse de que para el caso de los bosones, el álgebra de los operadores de creación-aniquilación, que ahora denotaremos respectivamente por  $a_k^\dagger, a_{k'}$ , viene dada por las relaciones

$$[a_k^\dagger, a_{k'}]_- = \delta_{kk'}, \quad (25)$$

donde  $[\_, \_]_-$  es el *conmutador* entre dos operadores, que, recordemos, puede definirse sobre los endomorfismos de cualquier espacio vectorial (en particular sobre los operadores de nuestro espacio de Hilbert-Fock): si  $V$  es un espacio vectorial y  $S, T \in \text{End}V$ ,

$$[S, T]_- = S \circ T - T \circ S.$$

El resto de estas notas se dedicará a dos cosas:

1. Formalizar estas construcciones en el contexto de las superálgebras de Lie.
2. Estudiar algunas consecuencias particulares, como la posibilidad de dar una realización de una superálgebra particular (la de Heisenberg) y sus aplicaciones en Física.

## 10. SUPERÁLGEBRAS DE LIE, TEORÍAS GAUGE Y SUPERVARIEDADES

Fijémonos en las ecuaciones (24) y (25): tienen un parecido muy llamativo, de hecho sólo difieren en un signo, que distingue al conmutador del anticonmutador, ¡seguro que hay alguna manera de escribirlas de forma unificada!. Esta pudo ser la pregunta (o el reto) que se planteó Bertram Kostant a mediados de los años 70, cuando introdujo la noción de supervariiedad a partir de las superálgebras de Lie. Vamos a ver qué son esas álgebras y qué tienen que ver con el problema que hemos venido considerando hasta ahora, el de describir un sistema de partículas idénticas, bosones y fermiones.

La idea intuitiva para unificar el tratamiento de (24) y (25) puede expresarse así: si convenimos en asignar a los bosones y fermiones una etiqueta, un “grado” que los identifique y distinga, podríamos decir que asociando a los bosones el 0 y a los fermiones el 1, sus operadores de creación-aniquilación vienen descritos por

$$[c_k^\dagger, c_{k'}] = \delta_{kk'}, \quad (26)$$

---

<sup>18</sup>Ejercicio para el lector

donde  $c$  puede ser  $a$  o  $b$  y  $[[\_, \_]]$ , el *superconmutador*, está dado por

$$[[S, T]] = S \circ T - (-1)^{\text{grad}(S) \cdot \text{grad}(T)} T \circ S, \quad (27)$$

siendo  $\text{grad}(S)$  el grado de  $S$  y  $\text{grad}(T)$  el de  $T$ . Obviamente, (26) se reduce a (24) y (25), respectivamente, cuando  $c = a$  y  $c = b$ .

Llegados a este punto, podríamos pensar lo siguiente: ahora que ya sabemos que nuestra descripción de los fenómenos asociados a fermiones y bosones requiere de dos tipos de operadores distintos (unos que conmutan y otros que anticonmutan), ¿no podríamos comenzar desde el principio definiendo algún tipo de espacios en los que se pueda desarrollar todo el análisis precedente pero que trate por igual a los bosones y fermiones?. La respuesta, que debemos fundamentalmente a Kostant y Berezin (consultar por ejemplo [Kos 77], [Ber 87] y las referencias de éste último para un seguimiento histórico) es que sí, y la guía nos la dan las ecuaciones (26) y (27).

Se trata de construir un álgebra con un producto  $\circ$  de manera que nos describa formalmente la situación que tenemos para los operadores de creación-aniquilación. Como ya hemos mencionado, toda la construcción se basa en la introducción de un “grado”: consideremos un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , que se puede expresar como suma directa de dos espacios  $V = V_0 \oplus V_1$ . Los elementos de  $V_0$  se llaman (vectores) *pares*, y los de  $V_1$  (vectores) *impares*. Se dice entonces que sobre  $V$  se ha definido una  $\mathbb{Z}_2$ -graduación, y que  $V$  es un *espacio vectorial  $\mathbb{Z}_2$ -graduado* o un *superespacio vectorial*. Si  $S : V \rightarrow V$  es un endomorfismo (es decir, una aplicación lineal), puede ocurrir que lleve los elementos de  $V_0$  en los de  $V_0$ , o en los de  $V_1$ , o incluso parte en uno y otro subespacio. Consideremos sólo los que no mezclan elementos, y llamémoslos *endomorfismos graduados homogéneos*,  $\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V)$ . Tendremos entonces aplicaciones de dos tipos: las pares (que transforman cada  $V_i$  con  $i = 0, 1$  en sí mismo) y las impares, que intercambian  $V_0$  con  $V_1$ . A las primeras, se les asigna grado 0 y a las segundas, grado 1.

Ahora, sobre los endomorfismos de un espacio vectorial graduado podemos definir varias estructuras algebraicas: una de ellas es la de espacio vectorial (sobre el mismo cuerpo que  $V$ ), mediante la suma de aplicaciones y el habitual producto por un escalar. Otra es una estructura de semigrupo, en la que el producto es la composición de aplicaciones  $S \circ T$ . Este producto es asociativo y tiene neutro (la aplicación identidad), pero en general no todo elemento tiene inverso y, desde luego, no es conmutativo. Con esto,  $(\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V), +, \circ)$  se dice que tiene una estructura de *álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada* o *superálgebra*.

Una medida de la no conmutatividad de  $\circ$  la da el llamado *conmutador de endomorfismos graduados*:

$$[[S, T]] = S \circ T - (-1)^{\text{grad}(S) \text{grad}(T)} T \circ S \quad (28)$$

(fijémonos en que esto no es otra cosa que lo que antes hemos llamado superconmutador, cuando  $V$  es el espacio de Hilbert-Fock). Es claro que se tienen las siguientes propiedades<sup>19</sup>:

1.  $\mathbb{K}$ -bilinealidad (con  $\mathbb{K}$  el cuerpo base de  $V$ ).
2.  $[[S, T]] = -(-1)^{ST} [[T, S]]$ .
3.  $[[S, [T, U]]] = [[[[S, T], U]] + (-1)^{ST} [T, [[S, U]]]$ .

<sup>19</sup>Ejercicio para el lector

Con estas propiedades,  $(\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V), [\_, \_])$  tiene estructura de lo que se denomina *superálgebra de Lie*. En la sección siguiente trataremos estos conceptos con mayor detalle, utilizando un ejemplo concreto.

Notemos que estas son generalizaciones de las estructuras con las que uno trabaja habitualmente, incluso a nivel clásico: los espacios que aparecen en Mecánica Clásica como espacios de fase o de configuración son variedades diferenciales  $M$  modeladas sobre espacios vectoriales  $\mathbb{R}^n$ , es decir, espacios que *localmente* son como un abierto de  $\mathbb{R}^n$  (piénsese en el espacio de configuración de un péndulo, por ejemplo, que es la circunferencia  $S^1$  muy distinta globalmente de  $\mathbb{R}$ ), y los observables clásicos son las funciones de  $C^\infty(T^*M)$  ( $T^*M$  es el espacio cotangente), equipadas con el corchete de Poisson  $\{\_, \_ \}$  que convierte a  $(C^\infty(M), \{\_, \_ \})$  en un álgebra de Lie: sus propiedades son las mismas que las (1), (2), (3) anteriores<sup>20</sup>, pero con la graduación trivial (todos los elementos son pares). Así, reemplazando los espacios vectoriales (modelos locales) de la teoría clásica por sus análogos  $\mathbb{Z}_2$ -graduados, resulta un marco de trabajo que retiene todas las características algebraicas y analíticas necesarias para poder hacer mecánica (se tienen las mismas estructuras que en el caso clásico, pero ahora graduadas) y se obtiene la ventaja de un tratamiento simétrico (o mejor dicho, supersimétrico) *ab initio* de bosones y fermiones, según hemos visto.

Los espacios que localmente están modelados sobre productos de abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y una superálgebra, se denominan *supervariedades*, y la categoría de tales espacios es en la que tiene cabida de manera natural las teorías que pretenden unificar los distintos tipos de partículas (junto con sus interacciones) que conocemos hoy en día.

Por ejemplo, pensemos en la descripción de las partículas mediante campos. Aquí los objetos fundamentales son aplicaciones  $\Psi(x^\mu)$ , definidas en el espacio-tiempo y con valores en algún espacio vectorial sobre el que actúa un cierto grupo de simetría  $G$ , que en Física se denomina grupo de gauge de la teoría. Los espacios vectoriales en que toman valores los distintos campos correspondientes a partículas de distinto tipo tienen características muy diferenciadas, lo cual hace que las teorías gauge clásicas tengan que trabajar con fermiones y bosones por separado, cosa que no sucede si se consideran supervariedades.

Con algo más de detalle técnico, podemos decir que las teorías gauge clásicas se basan en la consideración de una variedad espacio-tiempo  $M_4$ , sobre la que se tiene un fibrado principal  $(P, \pi, M_4, G)$ ; los objetos físicos de interés son de dos tipos: los campos de materia (que describen electrones, muones, etc), que se representan por secciones de un fibrado vectorial  $(E, \tau, M_4)$  asociado a  $(P, \pi, M_4, G)$ , y los campos de gauge (que describen la interacción, como el campo electromagnético), que vienen dados por secciones del fibrado de conexiones de  $(P, \pi, M_4, G)$ ; el grupo de Lie  $G$  se denomina *grupo de gauge*. En otras palabras: desde este punto de vista “geométrico”, los campos gauge mediadores de la interacción son precisamente las conexiones del fibrado principal  $(P, \pi, M_4, G)$ . De hecho, la ley de transformación de los representantes locales de las conexiones bajo un cambio de la sección local

<sup>20</sup>En realidad, el corchete de Poisson  $\{\_, \_ \}$  tiene una importantísima propiedad adicional: si  $f, g, h \in C^\infty(M)$ , entonces,

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Se dice que  $\{\_, \_ \}$  actúa sobre  $C^\infty(M)$  mediante derivaciones y que  $(C^\infty(M), \{\_, \_ \})$  es un álgebra de Poisson. En estas notas tendremos necesidad de recurrir a esta propiedad adicional en el apéndice B.

que los determina coincide con la expresión para la transformación de los campos de Yang-Mills, y la elección de un gauge para éstos corresponde a elegir una sección local del fibrado (esta idea fue introducida por C.N. Yang y T. T. Wu en [Yan-Wu 75]. Una referencia muy detallada, con cálculos explícitos y numerosas aplicaciones, en particular a la relación con las teorías de cohomología, es [Azc-Izq 98]). Sin embargo, esta estructura introduce una asimetría manifiesta entre los campos de materia y los campos gauge: mientras los primeros pueden ser de tipo bosónico o fermiónico y están definidos en un fibrado vectorial arbitrario (salvo por estar asociado a un fibrado principal igualmente arbitrario), los segundos están definidos en un fibrado de conexiones, y sólo pueden ser de tipo bosónico. Los términos bosónico y fermiónico se refieren al tipo de paréntesis de Poisson que es posible definir para estos campos (cuando se hace un análisis de Fourier en modos cuánticos resultan los conmutadores o anticonmutadores que ya conocemos para los operadores de creación-aniquilación), y éste a su vez determina el proceso de cuantización de los mismos, de modo que las teorías gauge en su formulación original no pueden verse como las candidatas finales a una teoría unificada de campos.

Como ya hemos mencionado, las teorías supersimétricas ofrecen una solución a este problema a través de una sustitución de los conceptos tradicionales de la Geometría Diferencial por unos análogos  $\mathbb{Z}_2$ -graduados; los supercampos que aparecen en esta formulación poseen, en general, tanto parte una par (bosónica) como una impar (fermiónica), de modo que las ecuaciones de campo describen simultáneamente campos de materia y campos de gauge. El principal problema es la complejidad técnica de su formulación, que hace que no sea sencillo el construir un formalismo que permita obtener estas ecuaciones de campo de un modo semejante al clásico; en cualquier caso, el estudio de las variedades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas o supervariedades, presenta un indiscutible interés no sólo matemático, sino también físico (véanse [Fre 86, Wit 92]).

En las siguientes Secciones, describiremos un modelo sencillo que implementa las ideas básicas de la supersimetría en el contexto de la Mecánica Cuántica, siguiendo las ideas de E. Witten (véase [Wit 81]), que son una reelaboración de otras ya existentes (cfr. [Ber-Mar 75], [BDZVH 76]). Como referencias básicas citaremos [CKS 01, Cro-Rit 83, Gen-Kri 85, Kib-Dao 04, Fer 09].

## 11. EJEMPLO: LA SUPERÁLGEBRA DE LIE $End(\mathbb{C}^2)$

Aprovecharemos esta sección para introducir algunas definiciones formales y analizar un ejemplo muy sencillo pero que reúne todas las características en las que estamos interesados. Referencias útiles para el estudio de las superálgebras de Lie son [CNS 75, Sche 79, FSS 00].

Consideremos el grupo abeliano  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ , con la suma módulo 2, y  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Se dice que  $V$  es  $\mathbb{Z}_2$ -graduado, ó que es un  $\mathbb{K}$ -superespacio vectorial, si admite una descomposición en suma directa de subespacios

$$V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_2} V_m = V_0 \oplus V_1.$$

Los elementos del subespacio  $V_m$  se llaman homogéneos de grado  $m \in \mathbb{Z}_2$ . Cuando  $m = 0$  se dice que son elementos *pares* y cuando  $m = 1$ , *impares*. Se define así una aplicación  $|\cdot| : (V_1 \cup V_2) - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  mediante

$$|v| = m \text{ si } v \in V_m,$$



llamada aplicación *grado*. Con el fin de que esta aplicación resulte bien definida, se conviene en asignar a los elementos de  $\mathbb{K}$  grado 0 y establecer que  $|k.v|$  (con  $k \in \mathbb{K}$  y  $v \in V$ ) es  $|k| + |v| = |v|$ .

Supongamos ahora que  $V$  y  $W$  son  $\mathbb{K}$ -superespacios vectoriales. Una aplicación  $\mathbb{K}$ -lineal  $\phi : V \rightarrow W$  se dice que es homogénea de grado  $p \in \mathbb{Z}_2$  (par si  $p = 0$ , impar si  $p = 1$ ) cuando ocurre que

$$\phi(V_m) \subset W_{m+p}$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}_2$ . Si  $p = 0$  (esto es,  $\phi$  es una aplicación par) suele decirse que  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  es un morfismo de  $\mathbb{K}$ -superespacios vectoriales. Naturalmente, se tiene el caso particular en que  $V = W$ . Entonces, se habla de endomorfismos homogéneos de grado  $p \in \mathbb{Z}_2$  y de endomorfismos de superespacios vectoriales si  $p = 0$ .

Recordemos que una  $\mathbb{K}$ -álgebra es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $A$  junto con una aplicación  $\mathbb{K}$ -bilineal  $A \times A \rightarrow A$  que escribiremos como  $(a_1, a_2) \mapsto a_1 \cdot a_2$ . Si  $A$  es un  $\mathbb{K}$ -superespacio vectorial y esta aplicación lleva  $A_m \times A_n$  en  $A_{m+n}$  (la suma módulo 2), con  $m, n \in \mathbb{Z}_2$ , entonces diremos que  $A$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada o, simplemente, una superálgebra.

Como veremos enseguida, puede darse el caso en que una superálgebra  $A$  tenga, además, definida otra operación, una aplicación  $\mathbb{K}$ -bilineal  $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$  tal que se cumplen las siguientes propiedades adicionales:

1.  $[[a_1, a_2]] = -(-1)^{|a_1||a_2|}[[a_2, a_1]]$  (antisimetría  $\mathbb{Z}_2$ -graduada),
2.  $[[a_1, [a_2, a_3]]] = [[a_1, a_2], a_3] + (-1)^{|a_1||a_2|}[[a_2, [a_1, a_3]]]$  (identidad de Jacobi  $\mathbb{Z}_2$ -graduada).

En tal caso, se dice que  $(A, [\cdot, \cdot])$  forma una superálgebra de Lie. La operación  $[\cdot, \cdot]$  suele denominarse corchete de Lie (graduado) o supercorchete.

Veamos cómo surgen de manera natural las superálgebras de Lie. Consideremos un superespacio vectorial  $V = V_0 \oplus V_1$  y los endomorfismos homogéneos sobre  $V$ ,  $\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V)$ . Sabemos que se tiene la descomposición inducida por el grado

$$\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V) = \text{End}_{\mathbb{K}}^0(V) \oplus \text{End}_{\mathbb{K}}^1(V),$$

donde

$$\text{End}_{\mathbb{K}}^0(V) = \{f \in \text{End}_{\mathbb{K}}^G(V) : f(V_i) \subset V_i\}$$

$$\text{End}_{\mathbb{K}}^1(V) = \{f \in \text{End}_{\mathbb{K}}^G(V) : f(V_i) \subset V_{(i+1) \bmod 2}\}$$

siendo  $i \in \{0, 1\}$ . En este espacio de endomorfismos homogéneos, está definida la composición<sup>21</sup> y, a partir de ella, construimos un corchete de Lie graduado  $[[\cdot, \cdot]] : \text{End}_{\mathbb{K}}^G(V) \times \text{End}_{\mathbb{K}}^G(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}^G(V)$  poniendo

$$[[f, g]] = f \circ g - (-1)^{|f||g|}g \circ f.$$

Es inmediato<sup>22</sup> comprobar que esta definición determina una estructura de superálgebra de Lie sobre  $\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V)$ . Este ejemplo de superálgebra de Lie es universal en el siguiente sentido: al igual que ocurre en la teoría de álgebras de Lie clásicas, donde todo álgebra  $n$ -dimensional sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ ,  $\mathfrak{g}$ , es isomorfa a una del tipo  $(\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n), [\cdot, \cdot])$  con  $[\cdot, \cdot]$  el conmutador de endomorfismos dado por

<sup>21</sup>De manera que  $(\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V), \circ)$  es una superálgebra si se establece que  $|f + g| = |f| + |g|$ . Se deja la comprobación como un sencillo ejercicio.

<sup>22</sup>Ejercicio para el lector.

$[A, B] = A \circ B - B \circ A$  (teorema de Ado), en el caso  $\mathbb{Z}_2$ -graduado toda superálgebra también es isomorfa a una del tipo  $(\text{End}_{\mathbb{K}}^G(V), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$  (véase [Sche 79] §4). De hecho, el objetivo central de este trabajo consiste en mostrar explícitamente cómo el álgebra de la Mecánica Cuántica supersimétrica se representa en esta forma. Obviamente, para lograr este objetivo necesitaremos primero dar el superespacio vectorial  $V = V_0 \oplus V_1$  sobre el cual se considerarán los endomorfismos graduados homogéneos.

Como un ejercicio previo, vamos a estudiar la estructura de  $\text{End}_{\mathbb{C}}^G(V)$  cuando se tiene el  $\mathbb{C}$ -superespacio vectorial  $\mathbb{C}^{1|1} = \mathbb{C} \oplus \Pi\mathbb{C}$ , donde  $\mathbb{C} \simeq \Pi\mathbb{C}$  son isomorfos y la única diferencia entre ellos es que la copia  $\mathbb{C}$  corresponde a los elementos de  $\mathbb{C}^{1|1}$  con grado 0 (i.e,  $\mathbb{C} = (\mathbb{C}^{1|1})_0$ ) y la copia  $\Pi\mathbb{C}$  contienen a los elementos de  $\mathbb{C}^{1|1}$  con grado 1 (i.e,  $\Pi\mathbb{C} = (\mathbb{C}^{1|1})_1$ ). En otras palabras: todo elemento  $z \in \mathbb{C}^{1|1}$  se escribe en la forma  $z = z_0 \oplus z_1$ , con  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $z_1 \in \Pi\mathbb{C}$ , siendo pues  $|z_0| = 0$  y  $|z_1| = 1$ . Sin embargo, ya que la manera más cómoda de trabajar con endomorfismos consiste en utilizar sus representantes matriciales, aprovecharemos que como  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales  $\mathbb{C}^{1|1} \simeq \mathbb{C}^2$  e introduciremos la notación siguiente: si  $z \in \mathbb{C}^{1|1} = \mathbb{C} \oplus \Pi\mathbb{C}$  se descompone como  $z = z_0 \oplus z_1$  escribiremos

$$z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

(esto es, vemos a los elementos de  $\mathbb{C}^{1|1}$  como bispinores). Con esta notación, un  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1})$  se escribirá como

$$f = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} \\ f_{10} & f_{11} \end{pmatrix},$$

y su acción vendrá dada por

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} \\ f_{10} & f_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{00}z_0 + f_{01}z_1 \\ f_{10}z_0 + f_{11}z_1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, dado que  $f_{00}z_0 + f_{01}z_1$  debe tener grado 0 y  $f_{10}z_0 + f_{11}z_1$  grado 1, mientras que  $|z_0| = 0$  y  $|z_1| = 1$ , para que  $f$  sea homogénea de grado 0 se requiere que

$$\begin{aligned} |f_{00}| = 0 &= |f_{11}| \\ |f_{10}| = 1 &= |f_{01}| \end{aligned}.$$

Pero los elementos de matriz del endomorfismo  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1})$  son elementos del cuerpo base  $\mathbb{C}$  y estos elementos recordemos que siempre tienen grado 0. En consecuencia, podemos escribir

$$\text{End}_{\mathbb{C}}^0(\mathbb{C}^{1|1}) = \left\{ f \in \text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1}) : f \equiv \begin{pmatrix} f_{00} & 0 \\ 0 & f_{11} \end{pmatrix} \right\}.$$

Un análisis análogo nos conduce a

$$\text{End}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}^{1|1}) = \left\{ f \in \text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1}) : f \equiv \begin{pmatrix} 0 & f_{01} \\ f_{10} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es útil, por otra parte, observar lo siguiente: dada la base canónica de  $\mathbb{C}^{1|1}$ ,

$$\mathcal{B} = \left\{ e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

automáticamente se tiene una base asociada en  $End_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1})$ , dada por<sup>23</sup>

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Psi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De acuerdo con lo dicho, de entre los elementos de la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  hay dos pares:

$$|\Phi| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0 = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |\Phi^\dagger|,$$

y dos impares:

$$|\Psi| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1 = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = |\Psi^\dagger|.$$

Todo elemento  $f \in End_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1})$  se escribe como una combinación  $\mathbb{C}$ -lineal

$$f = f_{00}\Phi + f_{01}\Psi^\dagger + f_{10}\Psi + f_{11}\Phi^\dagger.$$

Si  $f \in End_{\mathbb{C}}^0(\mathbb{C}^{1|1})$ , entonces su expresión coordenada se reduce a

$$f = f_{00}\Phi + f_{11}\Phi^\dagger,$$

y si es  $g \in End_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}^{1|1})$ , entonces,

$$g = g_{01}\Psi^\dagger + g_{10}\Psi.$$

Como es bien sabido, la composición de endomorfismos se corresponde con el producto matricial de sus representantes matriciales. Esto hace que los cálculos con la estructura de superálgebra de Lie  $(End_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}^{1|1}), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$  sean muy sencillos. Por ejemplo, supongamos que

$$f = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\beta} \\ 3e^{i\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \llbracket f, g \rrbracket &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\beta} \\ 3e^{i\gamma} & 0 \end{pmatrix} - (-1)^{0 \cdot 1} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\beta} \\ 3e^{i\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\alpha+\beta)} \\ -3e^{i(\alpha+\gamma)} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y claramente  $|\llbracket f, g \rrbracket| = 1$  (no hace falta fijarse en la forma de la matriz resultante, basta con conocer los grados de los endomorfismos  $f$  y  $g$ : observemos que el grado del corchete siempre es el grado  $|f \circ g| = |f| + |g|$ ).

---

<sup>23</sup>En este contexto,  $\Phi, \Psi^\dagger, \Psi, \Phi^\dagger$  son simplemente unos nombres para los vectores base de  $End_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1})$ . En particular,  $\dagger$  no denota conjugación de ningún tipo (y, de hecho, más adelante veremos otra convención igualmente extendida para denominar a estos elementos utilizando los símbolos  $\sigma_0, \dots, \sigma_3$ ). El origen de esta notación está en su similitud con otros operadores en Física que si están relacionados por cierto tipo de conjugación.

## 12. MECÁNICA CUÁNTICA SUPERSIMÉTRICA (SUSY QM)

Hemos mencionado en repetidas ocasiones que uno de nuestros objetivos es el de dar una realización de la superálgebra de Heisenberg. En esta sección vamos a ver cuál es este álgebra y analizaremos su origen físico tal y como suele presentarse en los textos de Física, basándonos en el formalismo de los operadores de creación y aniquilación. Una vez que sepamos cómo es el álgebra y su significado físico, resultará más sencillo formalizar su construcción en el contexto de los endomorfismos de un superespacio vectorial (esto es, en el contexto de las supermatrices).

Supongamos una partícula que posee un grado de libertad bosónico y un grado de libertad fermiónico, esto es, para caracterizar el estado de la partícula supondremos que debemos dar dos vectores correspondientes respectivamente a los espacios de Hilbert de variables “bosónicas” y “fermiónicas”. En otras palabras, el espacio de Hilbert que describe al sistema será

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_F.$$

Por ejemplo, para una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  moviéndose en una dimensión la posición de la partícula es el grado de libertad bosónico, y  $\mathcal{H}_B = L^2(\mathbb{R})$ , mientras que según hemos visto en la sección 4,  $\mathcal{H}_F = \mathbb{C}^2$ . En el caso de tener  $N$  partículas (de las cuales hay  $n_B$  bosones y  $n_F$  fermiones) de acuerdo con el Principio de Pauli debemos simetrizar los estados bosónicos y antisimetrizar los fermiónicos, es decir, debemos tomar

$$\mathcal{H} = S\mathcal{H}_B \otimes \Lambda\mathcal{H}_F,$$

y podemos trabajar entonces con la representación por el número de ocupación. Así, para describir el sistema necesitamos dar un vector

$$\begin{aligned} |n_B\rangle &\equiv |\mu_1\mu_2\ldots\mu_r\rangle \in S\mathcal{H}_B \text{ con } \mu_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r, \mu_1 + \cdots + \mu_r = n_B \\ |n_F\rangle &\equiv |\nu_1\nu_2\ldots\nu_s\rangle \in \Lambda\mathcal{H}_B \text{ con } \nu_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq s, \nu_1 + \cdots + \nu_s = n_F. \end{aligned}$$

Para un elemento arbitrario, pondremos

$$|n_B\rangle \otimes |n_F\rangle \equiv |n_B, n_F\rangle.$$

En este contexto, se pueden introducir heurísticamente unos operadores de creación y aniquilación para estados bosónicos y fermiónicos de la siguiente forma. Para bosones tenemos (obsérvese la notación abreviada):

$$\left. \begin{aligned} a_r |n_B, n_F\rangle &= (a_r \otimes \mathbf{1}) |\mu_1\ldots\mu_r\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s\ldots\rangle \\ &= |\mu_1\ldots\mu_r - 1\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s\ldots\rangle = |n_B - 1_r, n_F\rangle \\ &\quad \text{y} \\ a_r^\dagger |n_B, n_F\rangle &= (a_r^\dagger \otimes \mathbf{1}) |\mu_1\ldots\mu_r\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s\ldots\rangle \\ &= |\mu_1\ldots\mu_r + 1\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s\ldots\rangle = |n_B + 1_r, n_F\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

donde  $n_B = \mu_1 + \ldots + \mu_r + \ldots$ ,  $n_F = \nu_1 + \ldots + \nu_s + \ldots$ , y para fermiones:

$$\left. \begin{aligned} b_s |n_B, n_F\rangle &= (\mathbf{1} \otimes b_s) |\mu_1\ldots\mu_r\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s\ldots\rangle \\ &= |\mu_1\ldots\mu_r\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s - 1\ldots\rangle = |n_B, n_F - 1_s\rangle \\ &\quad \text{y} \\ b_s^\dagger |n_B, n_F\rangle &= (\mathbf{1} \otimes b_s^\dagger) |\mu_1\ldots\mu_r\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s\ldots\rangle \\ &= |\mu_1\ldots\mu_r\ldots\rangle \otimes |\nu_1\ldots\nu_s + 1\ldots\rangle = |n_B, n_F + 1_s\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Naturalmente, es inmediato que estos operadores cumplen las siguientes relaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} [a_j, a_k]_- &= \delta_{jk} \\ [b_r, b_s]_+ &= \delta_{rs} \\ [a_j, b_s]_- &= 0, \end{aligned}$$

(donde realmente habría que escribir  $[a_j \otimes \mathbf{1}, a_k \otimes \mathbf{1}]_- = \delta_{jk} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ , etc, pero el contexto debería evitar las confusiones).

Para introducir la supersimetría, querríamos disponer de operadores que transformasen un estado bosónico en uno fermiónico y viceversa. De las expresiones (29) y (30) se ve que basta con definir unos operadores adjunto el uno del otro como sigue:

$$\begin{aligned} Q_{rs} &= a_r b_s^\dagger = a_r \otimes b_s^\dagger \\ Q_{rs}^\dagger &= a_r^\dagger b_s = a_r^\dagger \otimes b_s. \end{aligned}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} Q_{rs} |n_B, n_F\rangle &= a_r |\mu_1 \dots \mu_r \dots\rangle \otimes b_s^\dagger |\nu_1 \dots \nu_s \dots\rangle \\ &= |\mu_1 \dots \mu_r - 1 \dots\rangle \otimes |\nu_1 \dots \nu_s + 1 \dots\rangle \\ &= |n_B - 1_r, n_F + 1\rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

y de manera similar

$$Q_{rs}^\dagger |n_B, n_F\rangle = |n_B + 1_r, n_F - 1\rangle. \quad (32)$$

Se tiene una relación importantísima entre los operadores  $Q_{rs}$  y  $Q_{rs}^\dagger$ . Si se calcula su anticonmutador, aplicando las reglas de conmutación para las  $a$ 's y las  $b$ 's, resulta:

$$\begin{aligned} [Q_{rs}^\dagger, Q_{rs}]_+ &= [a_r^\dagger \otimes b_s, a_r \otimes b_s^\dagger]_+ \\ &= (a_r^\dagger \otimes b_s) (a_r \otimes b_s^\dagger) + (a_r \otimes b_s^\dagger) (a_r^\dagger \otimes b_s) \\ &= a_r^\dagger a_r \otimes b_s b_s^\dagger + a_r a_r^\dagger \otimes b_s^\dagger b_s \\ &= a_r^\dagger a_r \otimes (\mathbf{1} - b_s b_s^\dagger) + (\mathbf{1} + a_r a_r^\dagger) \otimes b_s^\dagger b_s \\ &= a_r^\dagger a_r \otimes \mathbf{1} - a_r^\dagger a_r \otimes b_s b_s^\dagger + a_r a_r^\dagger \otimes b_s^\dagger b_s + \mathbf{1} \otimes b_s^\dagger b_s \\ &= n_r^B \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes n_s^F, \end{aligned}$$

es decir:  $[Q_{rs}^\dagger, Q_{rs}]_+$  nos da el número de bosones en el estado  $n_r$  y el de fermiones en el estado  $n_s$ . Así

$$\sum_{r,s} [Q_{rs}^\dagger, Q_{rs}]_+ = N_B \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N_F, \quad (33)$$

donde  $N_B$  es el *operador número total de bosones* y  $N_F$  es el *operador número total de fermiones*:

$$\begin{aligned} N_B \otimes \mathbf{1} |n_B, n_F\rangle &= (\mu_1 + \dots + \mu_r + \dots) |n_B, n_F\rangle = n_B |n_B, n_F\rangle \\ \mathbf{1} \otimes N_F |n_B, n_F\rangle &= (\nu_1 + \dots + \nu_s + \dots) |n_B, n_F\rangle = n_F |n_B, n_F\rangle. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(N_B \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N_F) |n_B, n_F\rangle = (n_B + n_F) |n_B, n_F\rangle = N |n_B, n_F\rangle$$

y debido a esto, al operador  $N = N_B \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N_F$  se le denomina *operador número total de partículas*.

Por otra parte, el hecho de que tanto  $Q_{rs}^\dagger$  como  $Q_{rs}$  contengan a los operadores fermiónicos  $b_s^\dagger, b_s$ , hace que sean nilpotentes:

$$\begin{aligned} (Q_{rs}^\dagger)^2 |n_B, n_F\rangle &= (a_r^\dagger)^2 |n_B\rangle \otimes (b_s)^2 |n_F\rangle = (a_r^\dagger)^2 |n_B\rangle \otimes \mathbf{0} = 0 \\ (Q_{rs})^2 |n_B, n_F\rangle &= (a_r)^2 |n_B\rangle \otimes (b_s^\dagger)^2 |n_F\rangle = (a_r)^2 |n_B\rangle \otimes \mathbf{0} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Esta propiedad de nilpotencia es la que nos permitirá construir un Hamiltoniano que admita a (31) y (32) como transformaciones de simetría<sup>24</sup> y que, por mezclar bosones y fermiones, denominaremos *supersimetrías*.

Basta con tomar

$$H = \sum_{r,s} [Q_{rs}^\dagger, Q_{rs}]_+ = N_B \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N_F \quad (35)$$

y fijarse en que para cualquier par de índices  $j, k$ :

$$[H, Q_{jk}^\dagger]_- = 0 = [H, Q_{jk}]_-. \quad (36)$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} [H, Q_{jk}]_- &= \sum_{r,s} [[Q_{rs}^\dagger, Q_{rs}]_+, Q_{jk}]_- \\ &= \sum_{r,s} [[a_r^\dagger b_s, a_r b_s^\dagger]_+, a_j b_k^\dagger]_- \\ &= \sum_{r,s} [[a_r^\dagger, a_r]_+, a_j]_- \otimes [[b_s, b_s^\dagger]_+, b_k^\dagger]_- \\ &= \sum_{r,s} [[a_r^\dagger, a_r]_+, a_j]_- \otimes [\mathbf{1}, b_k^\dagger]_- \\ &= \sum_{r,s} [[a_r^\dagger, a_r]_+, a_j]_- \otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

Observemos ahora otra propiedad básica<sup>25</sup> del anticonmutador de los operadores  $Q_{rs}^\dagger$  y  $Q_{rs}$ :

$$[Q_{jk}^\dagger, Q_{rs}]_+ = 0 \quad (37)$$

cuando  $(r, s) \neq (j, k)$ . A la vista de (34), (35), (36) y (37), definiendo

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{r,s} Q_{rs} \\ Q^\dagger &= \sum_{r,s} Q_{rs}^\dagger, \end{aligned} \quad (38)$$

<sup>24</sup>Conviene recordar que, en Mecánica Cuántica, un operador  $A$  se dice que es el generador de unas transformaciones de simetría si conmuta con el Hamiltoniano del sistema. Esto está relacionado con el hecho de que la ecuación de evolución para  $A$  sea  $\frac{dA}{dt} = [A, H]$  y, por tanto,  $[A, H] = 0$  implica  $A$  constante del movimiento (si  $A$  no depende explícitamente del tiempo).

<sup>25</sup>Ejercicio. No hay más que repetir el razonamiento de (33).

resulta claro que el espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  generado por  $\{H, Q, Q^\dagger\}$  tiene la estructura de una superálgebra de Lie:

$$\begin{aligned} [Q^\dagger, Q]_+ &= \sum_{r,s} [Q_{rs}^\dagger, Q_{rs}]_+ = H \\ [H, H]_- &= 0 \\ [Q, H]_- &= 0 \\ [Q^\dagger, H]_- &= 0 \end{aligned} \tag{39}$$

(en la primera ecuación se ha utilizado (37) para eliminar la contribución de los términos cruzados). Para verlo aún más explícitamente, declaramos que el grado de cada operador viene dado por

$$\begin{aligned} |H| &= 0 \\ |Q| &= 1 = |Q^\dagger|, \end{aligned}$$

y agrupamos los conmutadores  $[\cdot, \cdot]_-$ ,  $[\cdot, \cdot]_+$  en uno solo  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ , de manera que  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$  sobre dos elementos impares actúa como  $[\cdot, \cdot]_+$  y coincide con  $[\cdot, \cdot]_-$  cuando hay un elemento par. Si  $F, G \in \{H, Q, Q^\dagger\}$  podemos poner, entonces,

$$\llbracket F, G \rrbracket = F \circ G - (-1)^{FG} G \circ F,$$

como en (28), y las ecuaciones (39) se resumen entonces en la llamada *superálgebra de Heisenberg*:

$$\begin{aligned} \llbracket Q^\dagger, Q \rrbracket &= H \\ \llbracket Q^\dagger, H \rrbracket &= 0 = \llbracket Q, H \rrbracket. \end{aligned} \tag{40}$$

Fijémonos, por otra parte, en que la ecuación (35) puede interpretarse físicamente como la suma del Hamiltoniano de un oscilador armónico bosónico y otro oscilador fermiónico, sin interacción entre ellos. Lo que es importante en este punto, es que la existencia de supersimetrías se mantiene incluso cuando se introduce una interacción. Ciertamente, podríamos generalizar las definiciones de  $Q_{rs}^\dagger, Q_{rs}$  y poner

$$\begin{aligned} Q_{rs}^\dagger &= B_r^\dagger (a_r^\dagger, a_r) b_s \\ Q_{rs} &= B_r (a_r^\dagger, a_r) b_s^\dagger, \end{aligned}$$

donde  $B, B^\dagger$  son funciones arbitrarias<sup>26</sup> de los operadores bosónicos  $a_r^\dagger, a_r$ . Definiendo entonces  $Q, Q^\dagger$  y  $H$  como antes (véase (38)), las propiedades (39) se siguen cumpliendo, y se sigue teniendo una estructura supersimétrica. Sin embargo, no seguiremos este camino. En la próxima sección veremos otra descripción, más cercana al formalismo de las superálgebras de Lie, en la que partiremos directamente de la ecuación de Schrödinger incluyendo el potencial de interacción para llegar a la superálgebra (40). Como se verá en la última sección, esta nueva descripción resulta mucho más útil por lo que respecta a las aplicaciones.

---

<sup>26</sup>Observemos que si  $Q_{rs}^\dagger$  es el adjunto de  $Q_{rs}$ , esto implica que  $B_r^\dagger$  debe ser el adjunto de  $B_r$ . La arbitrariedad se entiende salvo este hecho.

## 13. REALIZACIÓN EXPLÍCITA DE LA SUPERÁLGEBRA DE HEISENBERG

En esta sección, vamos a realizar la superálgebra  $\{H, Q, Q^\dagger\}$  como subálgebra de los endomorfismos de un cierto superespacio vectorial. Este espacio no es otro que el producto tensorial de las funciones de cuadrado integrable con el la suma directa de dos copias del plano complejo, donde a la primera copia se le asigna paridad 0 y a la segunda paridad 1.

Consideraremos un sistema con bosones y fermiones de spin  $\frac{1}{2}$  y supondremos que la evolución del sistema está determinada, de acuerdo con lo expuesto en la sección 5, por una ecuación de Schrödinger que incluye un potencial de interacción entre las partículas  $V$ . El espacio de las funciones de onda<sup>27</sup> será  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^{1|1}$ .

Ahora,  $\mathcal{H}$  adquiere una estructura de  $\mathbb{C}$ –superespacio vectorial asignándole al factor  $L^2(\mathbb{R})$  la gradación (par) trivial, de modo que utilizando la distributividad del producto tensorial sobre la suma directa de espacios vectoriales se tiene la descomposición

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 = (L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}) \oplus (L^2(\mathbb{R}) \otimes \Pi\mathbb{C}).$$

Veamos con un poco más de detalle la estructura de  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ . Dada una función de onda  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  y un elemento

$$z = z_0 \oplus z_1 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1|1},$$

el producto tensorial  $\psi(x) \otimes z$  puede representarse matricialmente mediante

$$\psi(x) \otimes z = \begin{pmatrix} \psi(x) \cdot z_0 \\ \psi(x) \cdot z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) \cdot z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(x) \cdot z_1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\psi(x) \otimes z = (\psi(x) \otimes z_0) \oplus (\psi(x) \otimes z_1).$$

Supongamos ahora que tenemos el Hamiltoniano clásico

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

donde, por simplicidad, omitimos el factor constante  $\frac{\hbar^2}{m}$  que es inesencial para nuestra discusión. El lector puede, como ejercicio, restaurar este factor en cada una de las expresiones que siguen (en términos físicos, estamos utilizando unidades naturales,  $\hbar = 1$ , y hemos rescalado la unidad de masa para que  $m = 1$ ). Nótese que denominamos este Hamiltoniano con  $\tilde{H}$  y no simplemente  $H$ , el motivo es que más adelante construiremos el superhamiltoniano  $H$  a partir de  $\tilde{H}$ . Queremos hallar una realización del superálgebra de Heisenberg  $\llbracket Q^\dagger, Q \rrbracket = H$  en términos de operadores pertenecientes a los endomorfismos homogéneos de algún superespacio vectorial. El candidato natural es el superespacio  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  que acabamos de introducir; por otra parte, en la superálgebra de Heisenberg  $H$  debe tener grado  $|H| = 0$  y los elementos de  $End_{\mathbb{C}}^G(\mathcal{H})$  tienen la forma  $T \otimes f$ , donde  $T \in End_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{R}))$  y

<sup>27</sup>Los bosones también se describen mediante funciones de onda de  $\mathcal{H}$  pero sólo con aquellas pertenecientes al subespacio  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ .



$f \in \text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1})$ , de modo que se pueden representar como

$$\begin{aligned} T \otimes f &= \begin{pmatrix} f_{00} \cdot T & 0 \\ 0 & f_{11} \cdot T \end{pmatrix} \quad \text{si } f \in \text{End}_{\mathbb{C}}^0(\mathbb{C}^{1|1}) \\ T \otimes f &= \begin{pmatrix} 0 & f_{01} \cdot T \\ f_{10} \cdot T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } f \in \text{End}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}^{1|1}) \end{aligned} \quad (41)$$

Como acabamos de decir,  $H$  debe pertenecer al primer tipo, mientras que los operadores  $Q$  y  $Q^\dagger$  deben pertenecer al segundo. Por tanto,  $H$  debe tener el aspecto

$$H = \begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} = H_0 \otimes \Phi + H_1 \otimes \Phi^\dagger,$$

mientras que  $Q$  y  $Q^\dagger$  deben ser de la forma

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ Q_2 & 0 \end{pmatrix} = Q_1 \otimes \Psi^\dagger + Q_2 \otimes \Psi \\ Q^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & Q_1^\dagger \\ Q_2^\dagger & 0 \end{pmatrix} = Q_1^\dagger \otimes \Psi^\dagger + Q_2^\dagger \otimes \Psi \end{aligned}$$

La idea central de Witten en [Wit 81] consiste en tomar la forma más sencilla posible para estos operadores (o supercargas, en la terminología física). Concretamente, tomaremos

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} = A \otimes \Psi \\ Q^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^\dagger \otimes \Psi^\dagger \end{aligned} \quad (42)$$

donde  $A, A^\dagger \in \text{End}_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{R}))$  son operadores que habrá que determinar. Para ello, veamos qué condiciones imponen las ecuaciones a las que queremos llegar. De  $\llbracket Q^\dagger, Q \rrbracket = H$ , resulta:

$$\begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} = H = \llbracket Q^\dagger, Q \rrbracket = Q^\dagger \circ Q + Q \circ Q^\dagger = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Vemos entonces que todo resulta sencillo si se cumplen dos condiciones:

1. Tomamos como componente  $H_0$  del superhamiltoniano  $H$  el propio operador clásico:

$$H_0 = \tilde{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (44)$$

2. Se puede encontrar una descomposición de  $\tilde{H}$  en la forma  $A^\dagger A$ . En ese caso, también conoceremos  $H_1 = A A^\dagger$ .

El problema de encontrar unos operadores  $A, A^\dagger$  tales que  $\tilde{H} = A^\dagger A$  es, básicamente, el de hallar una “raíz cuadrada” del Hamiltoniano clásico  $\tilde{H}$ . Esto se puede resolver mediante el procedimiento de “completar cuadrados”: partimos de (44); si  $V$  pudiera expresarse como

$$V = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2, \quad (45)$$

tendríamos

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2$$

y esto, entendiendo el producto de operadores como su composición, no es otra cosa que

$$\tilde{H} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W \right).$$

Por tanto, conseguiremos tener  $\tilde{H} = A^\dagger A$  si tomamos

$$A^\dagger = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W$$

siendo  $W$  una solución a la ecuación (45). A  $W$  se le denomina en Física el super-potencial.

Volviendo ahora a las ecuaciones (42) y (43), es fácil darse cuenta<sup>28</sup> de que definiendo los operadores  $H, Q^\dagger, Q \in \text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathcal{H})$  como

$$\begin{aligned} H &= A^\dagger A \otimes \Phi + A A^\dagger \otimes \Phi^\dagger \\ &= \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2 \right) \otimes \Phi + \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2 \right) \otimes \Phi^\dagger \\ Q &= A \otimes \Psi = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W \right) \otimes \Psi, \\ Q^\dagger &= A^\dagger \otimes \Psi^\dagger = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W \right) \otimes \Psi^\dagger \end{aligned}$$

o bien, en términos matriciales,

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2 \end{pmatrix} \\ Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W & 0 \end{pmatrix} \\ Q^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{46}$$

se cumple que

$$\begin{aligned} \llbracket Q^\dagger, H \rrbracket &= 0 = \llbracket H, Q \rrbracket \\ \llbracket Q^\dagger, Q \rrbracket &= H \end{aligned}$$

esto es: se tiene una realización explícita del superálgebra de Heisenberg  $\langle H, Q^\dagger, Q \rangle$  como subálgebra de  $\text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathcal{H})$ .

Finalizaremos esta sección con unas observaciones acerca de otras convenciones que pueden encontrarse en la literatura sobre SUSY QM. En Física, además de la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $\text{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}^{1|1})$  que definimos en la sección precedente, también es común utilizar esta otra:

$$\tilde{\mathcal{B}}_\sigma = \left\{ \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

<sup>28</sup>Se deja como ejercicio para el lector comprobar que  $A A^\dagger = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2$ .

Los elementos de esta base, tienen las siguientes propiedades (que son las que hacen que sean de interés físico):

$$\begin{aligned}\sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+ &= [\sigma^+, \sigma^-]_+ = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma^+\sigma^- - \sigma^-\sigma^+ &= [\sigma^+, \sigma^-]_- = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ésta es la base que utilizó Witten en [Wit 81]. De hecho, él escribió el superhamiltoniano  $H$  (omitiendo de nuevo el factor  $\frac{\hbar}{m}$ ) como

$$H = \frac{1}{2}p^2 + W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3 W'(x),$$

donde el apóstrofe denota derivación. Según lo que hemos visto, esto debe entenderse como

$$\begin{aligned}H &= (\tfrac{1}{2}p^2 + W^2(x)) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}W'(x) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}p^2 + W^2(x) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}W'(x) & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2}p^2 + W^2(x) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}W'(x) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Como  $p = -i \frac{d}{dx}$  (recuérdese la discusión de la sección 5), resulta:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}W'(x) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}W'(x) \end{pmatrix}$$

que es la misma expresión de (46).

#### 14. APLICACIONES DE LA SUPERSIMETRÍA

En la sección anterior hemos visto que la clave para construir una realización de la superálgebra de Heisenberg reside en la introducción del superpotencial  $W$ . A partir de él se definen los operadores  $A$  y  $A^\dagger$  y, con ellos, las componentes del superhamiltoniano  $H = A^\dagger A \otimes \Phi + AA^\dagger \otimes \Phi^\dagger$ . Ahora bien, desde un punto de vista estrictamente práctico podría objetarse que este procedimiento tiene poco interés, pues para calcular  $W$  hay que resolver la ecuación (45) la cual, a primera vista, parece incluso más complicada que la propia ecuación de Schrödinger con el potencial  $V$ .

Sin embargo, esto no es así y ahora veremos por qué. Consideremos el Hamiltoniano clásico inicial,

$$\tilde{H}_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V.$$

Para muchos de los operadores que aparecen en Física, se tiene que el espectro es discreto y está acotado inferiormente. Suponiendo que éste es el caso de  $\tilde{H}_0$ , escribamos su espectro como  $Spec_{\mathbb{R}}(\tilde{H}_0) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$ ; si  $\lambda_0$  es el mínimo de  $Spec_{\mathbb{R}}(\tilde{H}_0)$ , sustituyendo  $\tilde{H}_0$  por  $H_0 = \tilde{H}_0 - \lambda_0 \cdot I$ , el menor valor propio en la ecuación

$$H_0\phi_k = \lambda_k\phi_k$$

puede tomarse como  $\lambda_k = 0$ . Al vector propio correspondiente,  $\phi_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , se le denomina estado base. Entonces, se tiene que  $\phi_0$  cumple la ecuación

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V\right) \phi_0 = 0,$$

de donde, despejando, el potencial  $V$  se puede expresar en términos del estado base:

$$V(x) = \frac{\phi_0''(x)}{2\phi_0(x)}.$$

Por otra parte, toda función de onda  $\phi(x)$  perteneciente al núcleo de  $A$  cumple que

$$H_0\phi = (A^\dagger A)\phi = 0,$$

es decir, es un elemento del subespacio propio correspondiente al valor propio  $\lambda = 0$  de  $H_0$ . Por tanto, si  $\phi_0 \in \ker A$  es  $\phi_0 \in \ker H_0$  y automáticamente se cumplen las dos condiciones

$$V(x) = \frac{\phi_0''(x)}{2\phi_0(x)} \quad (47)$$

y

$$W(x) = -\frac{\phi_0'(x)}{\sqrt{2}\phi_0(x)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \ln \phi_0(x).$$

Esta última expresión<sup>29</sup>, en particular, muestra que el cálculo del superpotencial  $W$  no es más complicado que el cálculo del subespacio invariante por  $H_0$  correspondiente a  $\lambda = 0$ .

En lo que sigue, cuando hablemos de estados base de  $H_0$  consideraremos<sup>30</sup> que  $\phi_0 \in \ker A \subset \ker H_0$ .

Tenemos entonces el Hamiltoniano inicial  $H_0$  que puede escribirse como

$$H_0 = A^\dagger A = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2,$$

donde  $W$  puede calcularse a partir de (47). Recordemos que también teníamos el Hamiltoniano

$$H_1 = AA^\dagger = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2.$$

Éste, se puede poner en la misma forma que  $H_0$ , como  $H_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}$ , si definimos

$$\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2.$$

Los potenciales  $V$  y  $\tilde{V}$  se suelen denominar “compañeros supersimétricos” (supersymmetric partners). Fijémonos en lo siguiente: el superhamiltoniano viene dado, como sabemos, por

$$H = H_0 \otimes \Phi + H_1 \otimes \Phi^\dagger = \begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix}.$$

<sup>29</sup>En esta discusión, pasamos por alto detalles importantes como si  $W(x)$  presenta singularidades debido a la presencia del logaritmo, etc. Puede probarse que para la clase de potenciales que se utiliza en Mecánica Cuántica tales problemas pueden resolverse satisfactoriamente. Para los detalles remitimos al lector interesado a [CKS 95].

<sup>30</sup>Puede probarse que esto no supone ninguna pérdida de generalidad.

Los estados impares (o fermiónicos) del espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  están generados por los autovectores de  $H_1$ , pues  $\mathcal{H}_1$  es un subespacio invariante por  $H_1$  (con mayor precisión, invariante por  $H_1 \otimes \Phi^\dagger$ ), como muestra un sencillo cálculo:

$$(H_1 \otimes \Phi^\dagger) \left( \phi \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_1 \phi \end{pmatrix} = H_1 \phi \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente,  $\mathcal{H}_0$  es un subespacio invariante por  $H_0$  (i.e, por  $H_0 \otimes \Phi$ ):

$$(H_0 \otimes \Phi) \left( \phi \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 \phi \\ 0 \end{pmatrix} = H_0 \phi \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego los estados pares (o bosónicos) de  $\mathcal{H}$  están generados por los autovectores de  $H_0$ . Ahora, aquí entra en juego el hecho de que tenemos una representación de la superálgebra de Heisenberg sobre  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ : como consecuencia de la existencia de esta representación los espectros de  $H_0$  y de  $H_1$  resultan ser biyectivos. Esto se debe a que las supercargas  $Q$  y  $Q^\dagger$  mezclan ambos tipos de estados (y, por ello, se dice que son operadores de *supersimetría*):

$$Q^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$Q \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\phi \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Consecuentemente, tenemos una degeneración: los estados de la forma

$$\begin{pmatrix} \phi_k^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_0,$$

donde  $\phi_k^{(0)}$  es una función propia del Hamiltoniano  $H_0$  con valor propio  $\lambda_k$ , y los de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A\phi_k^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1$$

son funciones propias del superhamiltoniano  $H = H_0 \otimes \Phi + H_1 \otimes \Phi^\dagger$  con el mismo valor propio  $\lambda_k$ . En efecto:

$$H \begin{pmatrix} \phi_k^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 \phi_k^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k \phi_k^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} \phi_k^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$H \begin{pmatrix} 0 \\ A\phi_k^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_1 A\phi_k^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A H_0 \phi_k^{(0)} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ A\phi_k^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Insistimos en que

$$\begin{pmatrix} \phi_k^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ A\phi_k^{(0)} \end{pmatrix}$$

son de distinta paridad, aun cuando son funciones propias del superhamiltoniano con el mismo valor propio, y que los operadores  $Q^\dagger$  y  $Q$  (de acuerdo con (48), (49)) actúan como supersimetrías, transformando estos estados entre ellos.

Para recapitular, tenemos que dada una función propia de  $H_0$  con valor propio  $\lambda_k$  ( $k > 0$ ),  $\phi_k^{(0)}$ , la función  $A\phi_k^{(0)}$  es propia de  $H_1$  con el mismo valor propio<sup>31</sup>. Con

<sup>31</sup>Otra forma de ver esto es mediante el cálculo

$$H_1 A\phi_k^{(0)} = (A A^\dagger) A\phi_k^{(0)} = A H_0 \phi_k^{(0)} = A(\lambda_k \phi_k^{(0)}) = \lambda_k A\phi_k^{(0)}.$$

un cálculo análogo, que se deja a cargo del lector, se prueba que podemos recuperar las funciones propias de  $H_0$ , excepto el estado base  $\phi_0^{(0)}$ , a partir de las de  $H_1$ : si  $\phi_k^{(1)}$  ( $k > 0$ ) es una función propia de  $H_1$  con valor propio  $\lambda_k$ , entonces  $A^\dagger \phi_k^{(1)}$  es una función propia de  $H_0$  con el mismo valor propio.

Los espectros de  $H_0$  y  $H_1$ , por tanto, son biyectivos. La única diferencia entre ellos es que el de  $H_1$  está “desplazado” con respecto al de  $H_0$ . En efecto, el estado base de  $H_1$  es  $A\phi_1^{(0)}$  y no  $A\phi_0^{(0)}$ , pues recordemos que  $\phi_0^{(0)} \in \ker A \subset \ker H_0$ , luego  $A\phi_0^{(0)} = 0$  y este estado no puede tomarse como propio de ningún operador.

Así pues, la existencia de supersimetrías en Mecánica Cuántica lleva aparejada la existencia de funciones propias degeneradas del operador superhamiltoniano  $H$ . Veamos cómo puede aprovecharse esto en la práctica.

Consideremos el potencial de pozo cuadrado infinito que ya estudiamos en la sección 8:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \geq L \text{ ó } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < L, \end{cases}$$

y el Hamiltoniano

$$\tilde{H}_0 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

a que da lugar. Ya vimos que la función de onda correspondiente al estado base estacionario (no nos interesará ahora la evolución temporal), haciendo  $\hbar = 1 = m$ , es la que corresponde al valor  $n = 1$ :

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L.$$

El valor de la energía asociado a este estado es

$$E_1 = \frac{\pi^2}{2L^2}.$$

De acuerdo con lo que hemos establecido al principio de esta sección, le restamos a  $\tilde{H}_0$  esta energía del estado base y obtenemos el nuevo Hamiltoniano

$$H_0 = \tilde{H}_0 - \frac{\pi^2}{2L^2} \cdot I,$$

para el cual las funciones propias son

$$\phi_k^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(k+1)\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L, k \geq 0, \quad (50)$$

y los valores propios correspondientes:

$$\lambda_k = E_k = \frac{k(k+2)\pi^2}{2L^2}.$$

El superpotencial  $W(x)$  se calcula fácilmente a partir de la expresión (45):

$$W(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\phi_0^{(0)}(x)} \frac{d}{dx} \phi_0^{(0)}(x) = -\frac{\pi}{L\sqrt{2}} \cot \frac{\pi x}{L}.$$

El compañero supersimétrico del potencial pozo cuadrado infinito resulta ser, entonces,

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dW}{dx} + W^2 = \frac{\pi^2}{2L^2} \left( 2 \csc\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \right).$$

De acuerdo con lo que hemos visto, el Hamiltoniano

$$H_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\pi^2}{2L^2} \left( 2 \csc\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \right)$$

tiene el mismo espectro (salvo la energía del estado base) que el Hamiltoniano original  $H_0$ , mucho más sencillo. Además, las funciones de onda propias de  $H_1$  se obtienen a partir de las de  $H_0$  (véase (50)) aplicando  $A$ . En particular, las primeras funciones propias de  $H_1$  son de la forma (omitiendo factores constantes):

$$\phi_0^{(1)}(x) \sim \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

y

$$\phi_1^{(1)}(x) \sim \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

Para comprender la potencia de este método conviene pensar en el proceso inverso y suponer que lo que nos dan en principio es la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano

$$H_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\pi^2}{2L^2} \left( 2 \csc\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \right).$$

*A priori*, pensaríamos que la solución será extremadamente complicada y un intento de resolver este problema mediante el método clásico nos convencerá enseguida de que esta suposición es correcta. Sin embargo, la existencia de una supersimetría subyacente al problema permite hallar las soluciones de este problema a partir de las de uno muchísimo más sencillo: el del potencial de pozo cuadrado infinito. De hecho, *todos* los potenciales resolubles exactamente en Mecánica Cuántica conocidos hasta el momento pueden calcularse mediante el método supersimétrico. La idea consiste en iterar el proceso: de  $H_0$  por factorización obtenemos  $H_1$ . Ahora, tomamos a éste como punto de partida y factorizándolo obtenemos otro Hamiltoniano  $H_2$ , etc. Los espectros de la cadena  $H_0, H_1, H_2, \dots$  están relacionados entre sí, y cada uno tiene un estado propio menos que el anterior. Si el Hamiltoniano inicial tenía un número finito de estados propios, este método (llamado de la jerarquía) proporciona una forma algorítmica de calcularlos todos de una manera sencilla.

Para ampliar información sobre este tema y otras aplicaciones de la supersimetría que no mencionaremos aquí, remitimos al lector a [CKS 95] y la versión ampliada [CKS 01]. Las extensiones del método de factorización descrito en estas notas (técnica de Mielnik), pueden consultarse en [Fer 09].

#### APÉNDICE A. LAS RELACIONES DE INCERTIDUMBRE

Supongamos dos observables  $A, B \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$  (que, recordemos, son autoadjuntos) tales que su conmutador viene dado por  $[A, B]_- = c \cdot I$  con  $c \in \mathbb{C}$  e  $I$  la identidad. Dado un estado (esto es, una función de onda normalizada)  $\Psi \in \mathcal{H}$ , se define la varianza de un operador *cualquiera*  $X \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$  en ese estado,  $(\Delta X)_{\Psi}$ , como

$$(\Delta X)_{\Psi}^2 = \langle X^2 \rangle_{\Psi} - \langle X \rangle_{\Psi}^2,$$

donde, también para un operador arbitrario,  $\langle X \rangle_{\Psi}$  es su valor esperado en el estado  $\Psi$ , definido por:

$$\langle X \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | X | \Psi \rangle.$$

Consideremos el elemento  $(A + \lambda iB)|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ ,  $(\lambda \in \mathbb{R})$  cuya norma respecto del producto escalar en  $\mathcal{H}$  (dada por  $\langle(A + \lambda iB)^2\rangle_\Psi$ ) debe ser mayor o igual que cero. Desarrollando esta condición, se tiene:

$$0 \leq \langle A^2 + \lambda^2 B^2 + i\lambda C \rangle_\Psi = \langle A^2 \rangle_\Psi + \lambda^2 \langle B^2 \rangle_\Psi + i\lambda c.$$

Esto significa que el discriminante de esta ecuación ha de ser mayor o igual que cero, lo cual implica que:

$$\langle A^2 \rangle_\Psi \langle B^2 \rangle_\Psi \geq \frac{|c|^2}{4}.$$

Definiendo los nuevos operadores

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A - \langle A \rangle_\Psi \\ \hat{B} &= B - \langle B \rangle_\Psi\end{aligned}$$

la propiedad  $[\hat{A}, \hat{B}]_- = c \cdot I$  se sigue cumpliendo, pues  $A$  y  $B$  sólo se han modificado en un factor constante (que conmuta con cualquier operador). Así, también se cumplirá

$$\langle \hat{A}^2 \rangle_\Psi \langle \hat{B}^2 \rangle_\Psi \geq \frac{|c|^2}{4}.$$

Pero, desarrollando  $\langle \hat{A}^2 \rangle_\Psi$  y  $\langle \hat{B}^2 \rangle_\Psi$  de acuerdo con sus definiciones, se obtiene (como es inmediato comprobar):

$$\begin{aligned}\langle \hat{A}^2 \rangle_\Psi &= \langle A^2 \rangle_\Psi - \langle A \rangle_\Psi^2 = (\Delta A)_\Psi^2 \\ \langle \hat{B}^2 \rangle_\Psi &= \langle B^2 \rangle_\Psi - \langle B \rangle_\Psi^2 = (\Delta B)_\Psi^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$(\Delta A)_\Psi \cdot (\Delta B)_\Psi \geq \frac{|c|}{2},$$

que es el enunciado matemático de las *relaciones de incertidumbre*<sup>32</sup> de Heisenberg. La denominación se debe a que  $(\Delta A)_\Psi$  se interpreta como la incertidumbre en la medida de la magnitud representada por el observable  $A$  en el estado  $\Psi$ . Si aplicamos el cálculo anterior a los operadores posición y momento, que cumplen

$$[x, -i\hbar \frac{d}{dx}]_- = i\hbar \cdot I,$$

resulta que, en cualquier estado  $\Psi \in \mathcal{H}$ ,

$$(\Delta x)_\Psi \cdot (\Delta p)_\Psi \geq \frac{\hbar}{2}.$$

La interpretación física de estas desigualdades es que no es posible determinar con precisión arbitraria simultáneamente la posición y el momento (equivalentemente, la velocidad) de una partícula cuántica. Como consecuencia, no es posible hablar de la trayectoria definida de una partícula si a la vez se espera trabajar con su velocidad o momento, como ocurre en el caso de la Dinámica Cuántica (aunque no hay obstáculos para considerar la trayectoria de una partícula de la cual se renuncia a conocer su velocidad).

---

<sup>32</sup>En Iberoamérica es frecuente hablar de las “relaciones de incerteza”. Ambas formas son válidas, si bien la Real Academia de la Lengua dice que “incerteza” es una forma “en femenino poco usada” de “incertidumbre”.



## APÉNDICE B. EL CORCHETE DE POISSON Y EL CONMUTADOR CUÁNTICO

Una herramienta básica en la formulación de la Mecánica Clásica, como hemos visto, es el corchete de Poisson  $\{.,.\}$ . Si  $M$  es el espacio fásico correspondiente a un cierto sistema físico, un observable físico es cualquier función  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Desde un punto de vista algebraico, el corchete de Poisson convierte al anillo de observables (cuyo producto es el producto de funciones reales) en un álgebra de Lie  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{.,.\})$ , es decir, se tienen las propiedades (para todas  $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ):

1.  $\{.,.\}$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal antisimétrica.
2. Se cumple la llamada regla de Leibniz:

$$\{f, g \cdot h\} = g \cdot \{f, h\} + \{f, g\} \cdot h.$$

3. Se cumple la identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}.$$

Dirac, en su conocido libro sobre los principios de la Mecánica Cuántica (véase [Dir 81]), se planteó cuál sería el análogo cuántico de esta estructura algebraica presente en el caso clásico. Ahora bien, como ya se ha mencionado, los observables son operadores  $A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$  sobre un cierto espacio de Hilbert complejo, que también forman un anillo (con respecto a la composición), solo que éste es no conmutativo. La idea de Dirac consistió en buscar un nuevo corchete

$$[.,.] : \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \times \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$$

que mantenga las propiedades del de Poisson, esto es, que convierta  $(\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}), [.,.])$  en un álgebra de Lie. Para construirlo, Dirac tuvo en cuenta la no conmutatividad del anillo  $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$  y calculó (para  $A_i, B_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ) el corchete  $[A_1 A_2, B_1 B_2]$  de dos formas distintas, aplicando reiteradamente la regla de Leibniz<sup>33</sup>:

$$\begin{aligned} [A_1 A_2, B_1 B_2] &= \\ [A_1, B_1 B_2] A_2 + A_1 [A_2, B_1 B_2] &= \\ [A_1, B_1] B_2 A_2 + B_1 [A_1, B_2] A_2 + A_1 [A_2, B_1] B_2 + A_1 B_1 [A_2, B_2] \end{aligned}$$

y por otra parte:

$$\begin{aligned} [A_1 A_2, B_1 B_2] &= \\ [A_1 A_2, B_1] B_2 + B_1 [A_1 A_2, B_2] &= \\ [A_1, B_1] A_2 B_2 + A_1 [A_2, B_1] B_2 + B_1 [A_1, B_2] A_2 + B_1 A_1 [A_2, B_2]. \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones, se obtiene

$$[A_1, B_1](A_2 B_2 - B_2 A_2) = (A_1 B_1 - B_1 A_1)[A_2, B_2].$$

Pero al ser  $A_1, A_2, B_1, B_2$  independientes entre sí, esta relación implica<sup>34</sup> que para cualesquiera  $A, B \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ ,

$$[A, B] = k(AB - BA)$$

<sup>33</sup>Por simplicidad en la escritura, indicaremos la composición de dos operadores mediante la yuxtaposición, es decir,  $AB$  denotará  $A \circ B$ .

<sup>34</sup>En realidad, la afirmación de Dirac necesita justificación, ya que no es cierta en álgebras de Poisson arbitrarias. Lo que ocurre es que se está haciendo la suposición implícita de que existen unos elementos particulares  $Q, P \in \text{Obs}(\mathcal{H})$  tales que  $[P, Q] = u$ , donde  $u$  es un elemento unidad del álgebra  $\text{Obs}(\mathcal{H})$ . A partir de aquí, se puede justificar la afirmación de Dirac.

para una cierta constante  $k \in \mathbb{C}$ . Es inmediato que tomando esta definición para  $[\cdot, \cdot]$ , se cumplen las propiedades de bilinealidad, antisimetría, Leibniz y Jacobi. Faltaría determinar la constante  $k$ .

Observemos que una condición adicional razonable es que si  $A$  y  $B$  son operadores autoadjuntos,  $[A, B]$  sea autoadjunto también (pues, desde un punto de vista físico,  $[A, B]$  proporciona el resultado de realizar las medidas correspondientes a  $A$  y  $B$  consecutivamente). Pero se tiene que:

$$\begin{aligned} [A, B]^\dagger &= k^*((AB)^\dagger - (BA)^\dagger) = k^*(B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger) \\ &= k^*(BA - AB) = -k^*(AB - BA) \end{aligned}$$

luego debe ser

$$k = \frac{i}{\hbar},$$

para una cierta constante real  $\hbar \in \mathbb{R}$  (experimentalmente se determina *a posteriori* que esta constante es, en efecto, la constante de Planck).

Así pues, Dirac introdujo el álgebra de Lie  $(\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}), [\cdot, \cdot])$  de los observables cuánticos. En Física, al corchete

$$[A, B] = \frac{i}{\hbar}(A \circ B - B \circ A)$$

se le denomina *conmutador canónico o de Dirac*.

## REFERENCIAS

- [Azc-Izq 98] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo: *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics*. Cambridge Monographs in Mathematical Physics, CUP (1998).
- [Ber 66] F. A. Berezin: *The method of second quantization*. Academic Press (1966).
- [Ber 87] F. A. Berezin: *Introduction to Superanalysis*. Reidel Publ. Dordrecht (1987).
- [Ber-Mar 75] F. A. Berezin and M. S. Marinov: *Classical spin and Grassmann algebra*. JETP Letters **21** n11 (1975) 320-322.
- [BDZVH 76] L. Brink, S. Deser, P. Di Vecchia, P. Van Hove and B. Zumino: *Local supersymmetry for spinning particles*. Phys. Lett. **64B** (1976) 435.
- [Cas 76] R. Casalbuoni: *On the quantization of Systems with anticommuting variables*. Nuovo Cim. **33** (1976) 115-124.
- [CKS 95] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme: *Supersymmetry and Quantum Mechanics*. Phys. Rep. **251** (1995) 267-385.
- [CKS 01] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme: *Supersymmetry in quantum mechanics*. World Scientific (2001).
- [CNS 75] L. Corwin, Y. Ne'eman and S. Sternberg: *Graded Lie algebras in mathematics and physics (Bose-Fermi symmetry)*. Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 573-604.
- [Cro-Rit 83] M. de Crombrugghe and V. Rittenberg: *Supersymmetric quantum mechanics*. Ann. of Phys. **151** (1983) 99-126.
- [Dir 81] P. A. M. Dirac: *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford UP (1981).
- [Fer 09] D.J. Fernandez: *Supersymmetric Quantum Mechanics*. CINVESTAV Advanced Summer School 2009, Mexico City, Mexico. arXiv:0910.0192
- [Fre 86] P.G.O. Freund: *Introduction to supersymmetry*. Cambridge Univ. Press (1986).
- [FSS 00] L. Frappat, A. Sciarrino and P. Sorba: *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*. Academic Press (2000).
- [Gas 03] S. Gasiorowicz: *Quantum Physics*, 3rd. Edition. John Wiley & Sons. New York (2003).
- [Ger-Ste 24] W. Gerlach and O. Stern: *Das magnetische Moment des Silberatoms*. Zeitschrift für Physik **9** (1922) 353-355, and *The directional quantisation in the magnetic field*. Ann. Phys. **74** (1924) 673-697.
- [Gen-Kri 85] L.E. Gendenshtein and I.V. Krive: *Supersymmetry in quantum mechanics*. Soviet Phys. Uspekhi **28** (1985) 645-666.

- [Gou-Uhl 25] S. Goudsmith and G. E. Uhlenbeck: *Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons*. Naturwiss. **XIII** (1925) 953, and *Spinning Electrons and the Structure of Spectra*. Nature **CXVII** (1926) 264.
- [GSW 87] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten: *Superstring Theory*, in two volumes. Cambridge University Press (1987).
- [Kib-Dao 04] M. Kibler and M. Daoud: *On supersymmetric Quantum Mechanics*. arXiv: quant-ph/049169.
- [Kos 77] B. Kostant: Differential geometrical methods in Math. Phys. (Proc. Sympos, Univ. Bonn, 1975) 177. Lecture Notes in Math, Vol **570**, Springer, Berlin (1977).
- [Sche 79] M. Scheunert: *The theory of Lie superalgebras*. Lecture Notes in Math, Vol **716**, Springer, Berlin (1979)
- [Str-Wig 89] R. F. Streater and A. S. Wightman: *PCT, Spin and Statistics, and All That*. Addison-Wesley, New York (1989).
- [Von 32] J. Von Neumann: *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*. CSIC, Madrid (1991).
- [Wes-Bag 92] J. Wess and J. Bagger: *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition. Princeton University Press (1992).
- [Wit 92] B. de Witt: *Supermanifolds*. Cambridge Univ. Press 2nd Edition (1992).
- [Wit 81] E. Witten: *Dynamical breaking of supersymmetry*. Nucl. Phys. B **185** (1981) 513-554.
- [Yan-Wu 75] T.T. Wu and C.N. Yang: *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*. Phys. Rev. **D12** (1975) 3485-3857.

FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ (MÉXICO), LATERAL  
 AV. SALVADOR NAVA S/N, SLP 78290.

*E-mail address:* jvallejo@fc.uaslp.mx